選択公理のもたらす論理と直観の乖離について

－ Banach-Tarski の定理を通して －

*佐　藤　得　志・**佐　藤　雄　介

On the dissociation of logic and intuition resulting from
the Axiom of Choice：through the Banach-Tarski theorem

SATO Tokushi and SATO Yusuke

要　旨

現代数学において, 選択公理は必要不可欠な重要な公理である. しかし, これを仮定することにより, 直観的には受け入れ難い数学的な事実が導かれることがある. 本稿においては, その代表的な例として, 3 次元における Banach-Tarski の定理を取り上げる. 特に, 選択公理を用いることによって Hausdorff の定理が導かれること, 及び, これを用いて Banach-Tarski の定理を証明できることについて, その詳細を解説する.

Key Words：選択公理
Banach-Tarski の定理
Hausdorff の定理
合同
有限分割合同

＊　宮城教育大学教育学部数学教育講座
＊＊　宮城教育大学大学院修士課程教科教育専攻数学教育専修

1. 序

数学という学問は, 論理的に議論を進めていく学問であり, 基本的には, 定義に基づいてそこから論理的に導くことのできる命題や定理を積み重ねることで, 厚みある数学の理論ができていく. 数学を学習するに当たっては, もちろん論理的に理解することは重要なのであるが, それだけでは必ずしも十分に理解したとは言えないこともある. 数学を十分に理解するためには, 論理的に理解するのみならず, 直観的に理解するということも重要であり, (学習者の内面において) これらが相互に結びついた状態になったとき, 真の意味での理解が得られたことになるのではないかと思う. 直観的な理解については, これまでの数学の学習等を通じて培われた経験や感覚がその土台となることが多いのではないかと思われる. 従って, そのような経験を数多く積んでいる方が, 数学を直観的に理解し易くなるのかもしれない.

このように, 数学的事柄の理解においては, 論理的な理解とともに, 直観的な理解も欠かせないように思われる. (但し, 特に高校までの数学においては, 論理的な理解を必ずしも要求せず, 直観的な理解のみを要求している場合もある.) しかし, 現代数学においては, 時として, 論理的には正しいのであるが, 直観的には理解し難いような数学的事実が存在する. その代表的な例が, 本稿で紹介する Banach-Tarski の定理である. 現代数学においては, 標準的に, Zermelo-Fraenkel の公理系に選択公理を加えた, いわゆる ZFC 公理系を基にして議論が行われる. この選択公理を仮定することによって得られる数学的に重要な定理はいくつもあり, その意味で選択公理は現代数学において不可欠な公理であると言ってよい. 一方で, この選択公理があるがゆえに, Banach-Tarski の定理のような不可解な定理が成り立ってしまうのも事実であり, ここでは理論と直観が掛け離れたような状況に陥る.

選択公理は, 数学的にきちんと表現するとやや難しく見えるかもしれないが, 平たく言うと, ‘いくつか (無限個の場合を含む) の空でない集合が与えられたとき, それぞれの集合から元を 1 つずつ (同時に) 選び出すことができる’ というものである. このこと自体は, 直観的に納得できるようなものであると思われる. これを数学的に述べると, 次のようになる (下のような写像 f を選択関数と呼ぶ).

公理 1.1 (選択公理). Λ を空でない集合とし, 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は

$$A_\lambda \neq \phi \quad \text{for all } \lambda \in \Lambda$$

をみたすとすると, 写像 $f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ で,

$$f(\lambda) \in A_\lambda \quad \text{for all } \lambda \in \Lambda$$

をみたすものが存在する. □

しかし, 選択公理を仮定することにより, Banach-Tarski の定理と呼ばれる直観的には受け入れ難い定理が成り立つことになる. これについて述べるために, 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ の図形の合同と有限分割合同について定義しておく. $\mathbf{R}^3$ における平行移動と回転を $\mathbf{R}^3$ からそれ自身への写像と考え, それらを有限回合成して得られる写像を $\mathbf{R}^3$ の合同変換と呼ぶ (合同変換の厳密な定義については 3 節において述べることにする). ここで, 自然数全体の集合を $\mathbf{N}$ で表し,

$$\mathbf{N}_{1,n} = \{i \in \mathbf{N} \mid 1 \le i \le n\} = \{1, 2, 3, \ldots, n\} \quad \text{for } n \in \mathbf{N}$$

と表すことにする. また, $\mathbf{R}^3$ の冪集合 ($\mathbf{R}^3$ の部分集合全体の集合) を $\mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ で表し, 和集合の記号 ‘$\sqcup$’ は直和 (互いに素な和) を表すことにする.

定義 1.1. $A, B \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ とする.

(i) $\mathbf{R}^3$ の合同変換 $\xi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ が存在して

$$\xi(A) = B$$

をみたすとき, A と B は合同であるといい, $A \equiv B$ と表す.

(ii) $n \in \mathbf{N}$ 及び $\{A_i\}_{i\in\mathbf{N}_{1,n}}, \{B_i\}_{i\in\mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ が存在して,

$$A = \bigsqcup_{i\in\mathbf{N}_{1,n}} A_i,\ B = \bigsqcup_{i\in\mathbf{N}_{1,n}} B_i,$$
$$A_i \equiv B_i \ \ (i \in \mathbf{N}_{1,n})$$

をみたすとき, A と B は有限分割合同であるといい, $A \overset{(*)}{\equiv} B$ と表す. □

更に, 次を定義しておく. ここで, $x, y \in \mathbf{R}^3$ に対し, $|x-y|$ は x と y の間の (Euclid の意味での) 距離を表し, $a \in \mathbf{R}^3$, $r \in (0, \infty)$ に対し,

$$B_r(a) = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid |x-a| < r\}\,(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$$

は中心 a, 半径 r の開球を表す.

定義 1.2. $A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ とする.

(i) $a \in A$ が A の内点であるとは, $r \in (0, \infty)$ が存在して, $B_r(a) \subset A$ をみたすことである.

(ii) A が $\mathbf{R}^3$ の開集合であるとは, 任意の $a \in A$ が A の内点となることである.

(iii) A が有界であるとは, $R \in (0, \infty)$ が存在して, $A \subset B_R(0)$ をみたすことである. □

このとき, (選択公理を仮定した上で) 次の定理が成り立つ.

定理 1.1 (Banach-Tarski の定理). $A, B \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ とする.

(i) A, B が共に有界かつ内点を含むならば, $A \overset{(*)}{\equiv} B$ が成り立つ.

(ii) A, B が共に空でない有界な開集合ならば, $A \overset{(*)}{\equiv} B$ が成り立つ. □

特に, 次が成り立つ.

系 1.1. $A, A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ とする.

(i) A は有界かつ内点を含み, $A \equiv A_1$, $A \equiv A_2$ をみたすならば, $A \overset{(*)}{\equiv} A_1 \cup A_2$ が成り立つ.

(ii) A が空でない有界な開集合かつ $A \equiv A_1$, $A \equiv A_2$ をみたすならば, $A \overset{(*)}{\equiv} A_1 \cup A_2$ が成り立つ. □

もう少し具体的に, 次が成り立つ.

例 1.1. (i) $a \in \mathbf{R}^3, r_1, r_2 \in (0, \infty)$ ならば, $B_{r_1}(a) \overset{(*)}{\equiv} B_{r_2}(a)$ が成り立つ.

(ii) $a, a_1, a_2 \in \mathbf{R}^3$, $r \in (0, \infty)$ ならば, $B_r(a) \overset{(*)}{\equiv} B_r(a_1) \cup B_r(a_2)$ が成り立つ. □

例 1.1 (i) においては, ある半径の開球を適当に有限個の集合に分解してそれを組み直すと, 異なる半径の開球にすることができることを主張している. 例 1.1 (ii) においては, ある半径の開球を適当に有限個の集合に分解してそれを組み直すと, 2 つの同じ半径の球の和にすることができることを主張している. そうすると, 例えば人間を 3 次元の図形とみなしてこれが内点を含むと仮定すると, 系 1.1 (i) により, アニメなどで登場するような '分身の術' が数学的に可能であることになる (実際には, 素粒子レベルで考えると, 人間が内点を含むとは言えないであろう).

このような数学的事実は, 直観的には理解し難いものと言えるであろう. その 1 つの理由としては, これを直観的に理解しようとしたときに, 3 次元の図形に対して体積の概念を意識してしまうことが挙げられる. 実際には, Banach-Tarski の定理において有限分割合同性を議論するときには, 分割されたそれぞれの集合は (Lebesgue) 可測ではなく, 体積の概念は意味をなさないのである.

本稿の内容は, 昨年度の「数学コース卒業研究演習」においてそのテーマとしたものである. そこでは Banach-Tarski の定理の証明のために本質的な役割を果たす Hausdorff の定理についてその証明を再構成した. 本稿においては, これに加えて, そこから更に Banach-Tarski の定理を実際に導いていくことにする. その証明については, 群論の知識も少しだけ用いてはいるが, 主に集合論, 及び線形代数学の知識のみを用いていて, これらは本学においては学部 2 年生までで学習するような初歩的な数学の知識であることに注意する. なお, この証明の大筋は [福田] に従うが, 本質的な誤りを含んでいたので, それを修正した. また, 証明そのものについても, より分かり易くなるように, 記号等を含めて大幅な改善を試みた.

2. 同値関係

まず, 同値関係について述べ, 更に選択公理との関係について述べる. 以下, X を集合とする.

定義 2.1. X 上の二項関係 '$\sim$' が $x, y, z \in X$ に対して次をみたすとき, X 上の同値関係という.

(i) (反射律) $x \sim x$.

(ii) (対称律) $x \sim y \;\Rightarrow\; y \sim x$.

(iii) (推移律) $x \sim y,\ y \sim z \;\Rightarrow\; x \sim z$. □

注意 2.1. '$\sim$' を X 上の同値関係, $Y \subset X$ とすると, '$\sim$' を Y 上 (正確には $Y \times Y$ 上) に制限した二項関係は, Y 上の同値関係である. □

集合 X の冪集合 (X の部分集合全体の集合) を $\mathcal{P}(X)$ と表す.

定義 2.2. '$\sim$' を X 上の同値関係とする.

(i) $x \in X$ に対し,

$$[x] = \{\, y \in X \mid y \sim x \,\} \, (\in \mathcal{P}(X))$$

を x の同値類と呼ぶ. また, $[x]$ の任意の元 y を同値類 $[x]$ の代表元という.

(ii)　$X/\sim\ = \{\,[x] \in \mathcal{P}(X) \mid x \in X\,\}\,(\subset \mathcal{P}(X))$

を X の '$\sim$' による商集合という. □

同値関係と同値類について, 次が成り立つことが知られている.

定理 2.1. '$\sim$' を X 上の同値関係とすると, $x, y \in X$ に対して次が成り立つ.

(i)　$x \in [x] \neq \phi$.　(ii)　$x \sim y \iff [x] = [y]$.

(iii)　$[x] \cap [y] \neq \phi \iff [x] = [y]$. □

このとき, 選択公理を用いると, X を次のような形の同値類の直和に分割することができる.

定理 2.2. '$\sim$' を X 上の同値関係とすると, $Z \in \mathcal{P}(X)$ が存在して,

$$X = \bigsqcup_{z \in Z} [z]$$

が成り立つ.

証明. 定理 2.1 (i), (iii) により,

$$X = \bigcup_{x \in X} [x] = \bigcup_{C \in X/\sim} C,$$
$$C \neq \tilde{C} \in X/\sim \quad \Rightarrow \quad C \cap \tilde{C} = \phi$$

となるから, 定理 2.1 (i) と合わせて

$$X = \bigsqcup_{C \in X/\sim} C, \quad C \neq \phi \quad \text{for all } C \in X/\sim$$

が成り立つ. 従って, 集合族 $\{C\}_{C \in X/\sim}$ に対して選択公理を適用すると, 写像 $f : X/\sim \to \bigcup_{C \in X/\sim} C\,(= X)$ が存在して,

$$f(C) \in C \quad \text{for all } C \in X/\sim$$

が成り立つ. このとき,

$$f(C) \in C \subset X, \quad [f(C)] = C \quad \text{for all } C \in X/\sim$$

であり, 定理 2.1 (iii) によって f は単射であるから,

$$Z = f(X/\sim) \in \mathcal{P}(X)$$

とおくとき, $f : X/\sim \to f(X/\sim) = Z$ とみなせば, これは全単射である. 従って,

$$X = \bigcup_{C \in X/\sim} C = \bigcup_{C \in X/\sim} [f(C)] = \bigcup_{z \in Z} [z]$$

が成り立つ.

更に, $\{[z]\}_{z \in Z}$ は互いに素である. 実際,

$$z, \tilde{z} \in Z = f(X/\sim), \ [z] \cap [\tilde{z}] \neq \phi$$

とすると, $C, \tilde{C} \in X/\sim$ が存在して, $z = f(C)$, $\tilde{z} = f(\tilde{C})$ となるから, 定理 2.1 (ii) によって

$$C \cap \tilde{C} = [f(C)] \cap [f(\tilde{C})] = [z] \cap [\tilde{z}] \neq \phi,$$
$$C = \tilde{C}, \ z = f(C) = f(\tilde{C}) = \tilde{z}$$

が成り立つ. □

3. 合同変換

次に, $\mathbf{R}^3$ における合同変換について述べておく. 本稿においては, $\mathbf{R}^3$ の元は縦 vector を用いて表すことにする (実際に $\mathbf{R}^3$ の元を成分を用いて記述するときは, 横 vector の形で表したものに転置の記号を付して表すことにする). このとき,

$$e_1 = {}^{\mathrm{t}}(1,0,0), e_2 = {}^{\mathrm{t}}(0,1,0), e_3 = {}^{\mathrm{t}}(0,0,1) \in \mathbf{R}^3$$

とすると, $\mathbf{R}^3$ は $\{e_1, e_2, e_3\}$ を (標準) 基底とする $\mathbf{R}$ 上の vector 空間である. また, $\mathbf{R}^3$ の恒等写像を $\iota : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ と表すことにする.

まず, 平行移動を定義する.

定義 3.1. $a \in \mathbf{R}^3$ に対し,

$$\tau[a](x) = x - a \quad \text{for } x \in \mathbf{R}^3$$

によって定まる写像 $\tau[a] : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を $\mathbf{R}^3$ の平行移動という. $\mathbf{R}^3$ の平行移動全体の集合を

$$T(\mathbf{R}^3) = \{\,\tau[a] \mid a \in \mathbf{R}^3\,\}$$

と表すことにする. □

注意 3.1. (i)　$\iota = \tau[0] \in T(\mathbf{R}^3)$.

(ii)　$\tau[a] \circ \tau[b] = \tau[a+b] \in T(\mathbf{R}^3)$　for $a, b \in \mathbf{R}^3$.

特に, $a \in \mathbf{R}^3$ に対し, $\tau[a] \circ \tau[-a] = \tau[-a] \circ \tau[a] = \tau[0] = \iota$ であるから, $\tau[a] : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ は全単射であり, $\tau[a]^{-1} = \tau[-a] \in T(\mathbf{R}^3)$ が成り立つ.

(従って, $T(\mathbf{R}^3)$ は写像の合成に関して群をなす.) □

次に, $\mathbf{R}^3$ の回転について述べる. $\mathbf{R}^3$ の原点を中心とする回転は $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像である.

一般に, $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像は 3 次実正方行列を用いて表すことができ, 逆に, 3 次実正方行列によって $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像を定めることができる. この意味で, $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像と 3 次実正方行列を同一視することができるのであるが, これらの全体の集合を $L(\mathbf{R}^3)$ と表すことにする. このとき, $\mathbf{R}^3$ の恒等写像 $\iota : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ は単位行列によって定まる線形写像であり, $\iota \in L(\mathbf{R}^3)$ である. また,

$$\alpha(x) = \alpha x \in \mathbf{R}^3,$$
$$\alpha \circ \beta = \alpha\beta,\ \alpha \circ \alpha \circ \cdots \circ \alpha = \alpha^n \in L(\mathbf{R}^3)$$
$$\text{for } x \in \mathbf{R}^3,\ \alpha, \beta \in L(\mathbf{R}^3),\ n \in \mathbf{N}$$

(左辺は写像の値及び合成, 右辺は行列の積の意味) と表すことができる. 更に, $\alpha \in L(\mathbf{R}^3)$ に対し, ${}^{\mathrm{t}}\alpha \in L(\mathbf{R}^3)$ は α (を行列とみなしたときの) 転置行列を表し, α の逆写像 (あるいは逆行列) が存在するとき, これを $\alpha^{-1} \in L(\mathbf{R}^3)$ と表すことにする.

このとき, $\mathbf{R}^3$ の (原点を中心とする) 回転は次のように定義される.

定義 3.2. $\rho \in L(\mathbf{R}^3)$ が $\mathbf{R}^3$ の (原点を中心とする) 回転であるとは,

$${}^{\mathrm{t}}\rho\rho = \iota\,(\in L(\mathbf{R}^3))$$

をみたすことである. $\mathbf{R}^3$ の (原点を中心とする) 回転全体の集合を $SO(\mathbf{R}^3)$ と表す. □

いま

$$S^2 = S^2(0) = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid |x| = 1 \,\}\,(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$$

を (原点を中心とする) 単位球面とする.

注意 3.2. (i) $\iota \in SO(\mathbf{R}^3)$.

(ii) $\rho \in SO(\mathbf{R}^3)$ ならば, ρ は (行列として) 正則であり, $\rho^{-1} = {}^{\mathrm{t}}\rho \in SO(\mathbf{R}^3)$ が成り立つ. 更に,

$$|\rho x| = |x| \quad \text{for all } x \in \mathbf{R}^3$$

であり, $\rho(S^2) = S^2$ が成り立つ.

(iii) $\rho, \sigma \in SO(\mathbf{R}^3)$ ならば, $\rho\sigma \in SO(\mathbf{R}^3)$ である. (従って, $SO(\mathbf{R}^3)$ は写像の合成 (あるいは行列の積) に関して群をなす.)

(iv) $\rho \in SO(\mathbf{R}^3)\backslash\{\iota\}$ を行列とみなしたとき, $1\,(\in \mathbf{R})$ は ρ の (重複度 1 の) 固有値である. 更に, 固有値 1 に対応する固有空間は原点を通る直線であり, これを $\ell_\rho\,(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$ とおくと, $x \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$\rho x = x \iff x \in \ell_\rho$$

が成り立つ. この ℓ_ρ を ρ の回転軸という. (ρ の 1 以外の (複素) 固有値は, ある $\theta \in (0, \pi]$ を用いて $\exp(\sqrt{-1}\,\theta), \exp(-\sqrt{-1}\,\theta)$ ($\sqrt{-1}$ は虚数単位) と表すことができる.)

(v) 任意の $e \in S^2$ に対し, $\sigma[e](e_3) = e$ をみたす $\sigma[e] \in SO(\mathbf{R}^3)$ が一意的に存在する. □

例 3.1. $\theta \in \mathbf{R}$ とするとき,

$$\rho[\theta] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\in L(\mathbf{R}^3))$$

とおくと, $\rho[\theta] \in SO(\mathbf{R}^3)$ であり,

$$\rho[\theta](te_3) = te_3 \quad \text{for all } t \in \mathbf{R}$$

が成り立つ. 従って, $\rho[\theta]$ の回転軸は

$$\ell_{\rho[\theta]} = \mathbf{R}e_3 = \{\, te_3 \in \mathbf{R}^3 \mid t \in \mathbf{R} \,\}\,(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$$

である. 実際には, $\rho[\theta]$ は $\ell_{\rho[\theta]} = \mathbf{R}e_3$ を回転軸とする回転角 θ の回転を表す. このとき,

$$\rho[\theta]^{-1} = \rho[-\theta],\ \rho[\theta_1]\rho[\theta_2] = \rho[\theta_1 + \theta_2]$$
$$\text{for } \theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}$$

が成り立つ. □

このとき, $\mathbf{R}^3$ の合同変換は次のように定義される.

定義 3.3. $T(\mathbf{R}^3)$ と $SO(\mathbf{R}^3)$ の有限個の元の合成として表される写像を, $\mathbf{R}^3$ の合同変換という. $\mathbf{R}^3$ の合同変換全体の集合を $M(\mathbf{R}^3)$ と表すことにする. □

注意 3.3. 注意 3.1, 注意 3.2 により, $M(\mathbf{R}^3)$ は写像の合成に関して群をなす. □

$\mathbf{R}^3$ 内の直線を任意の与えたとき, それを回転軸とするような回転が存在する.

例 3.2. $a \in \mathbf{R}^3, e \in S^2$ とし,

$$\begin{aligned} \ell[a, e] &= a + \mathbf{R}e \\ &= \{\, a + te \in \mathbf{R}^3 \mid t \in \mathbf{R} \,\}\,(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)) \end{aligned}$$

を $\mathbf{R}^3$ 内の直線とする. このとき, $\theta \in \mathbf{R}$ に対して

$$\xi[a, e; \theta](x) = \tau[-a](\sigma[e]\rho[\theta]\sigma[e]^{-1}(\tau[a](x)))$$
$$(\in \mathbf{R}^3) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}^3$$

とおくと, $\xi[a, e; \theta] \in M(\mathbf{R}^3)$ であり,

$$\xi[a, e; \theta](x) = x \quad \text{for all } x \in \ell[a, e]$$

が成り立つ. 実際には, $\xi[a, e; \theta]$ は $\ell[a, e]$ を回転軸とする回転角 θ の回転を表す. このとき, 例 3.1 を用いると,

$$\xi[a, e, \theta]^{-1} = \xi[a, e; -\theta],$$
$$\xi[a, e; \theta_1] \circ \xi[a, e; \theta_2] = \xi[a, e; \theta_1 + \theta_2]$$
$$\text{for } \theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}$$

が成り立つ. □

4. 有限分割合同

次に, $\mathbf{R}^3$ における合同と有限分割合同を改めて定義する.

定義 4.1. $A, B \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ とする.

(i) $\xi \in M(\mathbf{R}^3)$ が存在して

$$\xi(A) = B$$

をみたすとき, A と B は合同であるといい, $A \equiv B$ と表す.

(ii) $n \in \mathbf{N}$ 及び $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}}, \{B_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ が存在して,

$$A = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} A_i,\ B = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} B_i,$$
$$A_i \equiv B_i\ (i \in \mathbf{N}_{1,n})$$

をみたすとき, A と B は有限分割合同であるといい, $A \overset{(*)}{\equiv} B$ と表す. □

注意 4.1. $A, B, \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ とする.

(i) $A \equiv B$ ならば, $A \overset{(*)}{\equiv} B$ である.

(ii) $A \cap \hat{A} = B \cap \hat{B} = \phi$, $A \overset{(*)}{\equiv} B$, $\hat{A} \overset{(*)}{\equiv} \hat{B}$ ならば, $A \sqcup \hat{A} \overset{(*)}{\equiv} B \sqcup \hat{B}$ が成り立つ. □

例 4.1. $a, b \in \mathbf{R}^3$ とすると, $\tau[a-b] \in T(\mathbf{R}^3) \subset M(\mathbf{R}^3)$ である.

(i) $r \in (0, \infty)$ とすると,

$$\begin{aligned}\tau[a-b](B_r(a)) &= \tau[a-b](a + B_r(0)) \\ &= b + B_r(0) = B_r(b)\end{aligned}$$

であるから, $B_r(a) \equiv B_r(b)$ が成り立つ.

(ii) $$\begin{aligned}S^2(a) &= a + S^2 \\ &= \{x \in \mathbf{R}^3 \mid |x-a| = 1\}\,(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))\end{aligned}$$

を a を中心とする $\mathbf{R}^3$ の単位球面とすると,

$$\begin{aligned}\tau[a-b](S^2(a)) &= \tau[a-b](a + S^2) \\ &= b + S^2 = S^2(b)\end{aligned}$$

であるから, $S^2(a) \equiv S^2(b)$ が成り立つ. □

このとき, 次が成り立つ.

命題 4.1. (i) $\mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ における合同の関係 '$\equiv$' は, $\mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ における同値関係である.

(ii) $\mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ における有限分割合同の関係 '$\overset{(*)}{\equiv}$' は, $\mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ における同値関係である.

証明. (i) 注意 3.3 より, 容易に得られる.

(ii) 反射律, 対称律については, (i) から容易に得られる. ここでは, 推移律を示す.

$$A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3),\ A \overset{(*)}{\equiv} B,\ B \overset{(*)}{\equiv} C$$

と仮定する. このとき, $n, m \in \mathbf{N}$ 及び $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}}$, $\{B_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}}, \{\tilde{B}_j\}_{j \in \mathbf{N}_{1,m}}, \{\tilde{C}_j\}_{j \in \mathbf{N}_{1,m}} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ が存在して,

$$\begin{aligned}&A = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} A_i,\ B = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} B_i, \\ &B = \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,m}} \tilde{B}_j,\ C = \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,m}} \tilde{C}_j, \\ &A_i \equiv B_i\ (i \in \mathbf{N}_{1,n}),\ \ \tilde{B}_j \equiv \tilde{C}_j\ (j \in \mathbf{N}_{1,m})\end{aligned}$$

をみたす. 従って, $\xi_i \in M(\mathbf{R}^3)$ $(i \in \mathbf{N}_{1,n})$, $\eta_j \in M(\mathbf{R}^3)$ $(j \in \mathbf{N}_{1,m})$ が存在して

$$\xi_i(B_i) = A_i\ (i \in \mathbf{N}_{1,n}),\ \eta_j(\tilde{B}_j) = \tilde{C}_j\ (j \in \mathbf{N}_{1,m})$$

が成り立つ.

このとき,

$$A_{i,j} = \xi_i(B_i \cap \tilde{B}_j),\ \tilde{C}_{i,j} = \eta_j(B_i \cap \tilde{B}_j)$$
$$((i,j) \in \mathbf{N}_{1,n} \times \mathbf{N}_{1,m})$$

とおくと, $(i,j) \in \mathbf{N}_{1,n} \times \mathbf{N}_{1,m}$ に対して $\eta_j \circ \xi_i^{-1} \in M(\mathbf{R}^3)$ かつ

$$\tilde{C}_{i,j} = \eta_j(B_i \cap \tilde{B}_j) = \eta_j(\xi_i^{-1}(A_{i,j})) = \eta_j \circ \xi_i^{-1}(A_{i,j})$$

となり, $A_{i,j} \equiv \tilde{C}_{i,j}$ が得られる. 更に,

$$\begin{aligned}B_i &= \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,m}} (B_i \cap \tilde{B}_j)\ (i \in \mathbf{N}_{1,n}), \\ \tilde{B}_j &= \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} (B_i \cap \tilde{B}_j)\ (j \in \mathbf{N}_{1,m})\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}A &= \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} A_i = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \xi_i(B_i) \\ &= \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \xi_i\Big(\bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,m}} (B_i \cap \tilde{B}_j)\Big) \\ &= \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,m}} \xi_i(B_i \cap \tilde{B}_j) \\ &= \bigsqcup_{(i,j) \in \mathbf{N}_{1,n} \times \mathbf{N}_{1,m}} A_{i,j}, \\ C &= \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,m}} \tilde{C}_j = \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,m}} \eta_j(\tilde{B}_j) \\ &= \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,m}} \eta_j\Big(\bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} (B_i \cap \tilde{B}_j)\Big) \\ &= \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,m}} \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \eta_j(B_i \cap \tilde{B}_j) \\ &= \bigsqcup_{(i,j) \in \mathbf{N}_{1,n} \times \mathbf{N}_{1,m}} \tilde{C}_{i,j}\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, $A \overset{(*)}{\equiv} C$ である. □

次に, $\mathbf{R}^3$ における回転合同と有限分割回転合同を定義する.

定義 4.2. $A, B \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ とする.

(i) $\rho \in SO(\mathbf{R}^3)$ が存在して

$$\rho(A) = B$$

をみたすとき, A と B は回転合同であるといい, $A \equiv_{\mathrm{r}} B$ と表す.

(ii) $n \in \mathbf{N}$ 及び $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}}, \{B_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ が存在して,

$$A = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} A_i,\ B = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} B_i,$$
$$A_i \equiv_{\mathrm{r}} B_i \ \ (i \in \mathbf{N}_{1,n})$$

をみたすとき, A と B は有限分割回転合同であるといい, $A \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} B$ と表す. □

注意 4.2. $A, B, \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ とする.

(i) $A \equiv_{\mathrm{r}} B$ ならば, $A \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} B$ である.

(ii) $A \cap \hat{A} = B \cap \hat{B} = \phi$, $A \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} B$, $\hat{A} \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} \hat{B}$ ならば, $A \sqcup \hat{A} \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} B \sqcup \hat{B}$ が成り立つ.

(iii) $A \equiv_{\mathrm{r}} B$ ならば, $A \equiv B$ であり, $A \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} B$ ならば, $A \overset{(*)}{\equiv} B$ である. □

次の命題は命題 4.1 と同様にして証明できるので, 証明は省略する.

命題 4.2. (i) $\mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ における回転合同の関係 '$\equiv_{\mathrm{r}}$' は, $\mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ における同値関係である.

(ii) $\mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ における有限分割回転合同の関係 '$\overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}}$' は, $\mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ における同値関係である. □

いま, 有限分割回転合同に関する性質を一つ示しておく. このために, 次を定義する.

定義 4.3. $\Phi : \mathcal{P}(S^2) \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ を

$$\Phi(E) = \{tx \in \mathbf{R}^3 \mid x \in E,\, t \in (0,1)\}\,(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$$
$$\text{for } E \in \mathcal{P}(S^2)$$

によって定義する. □

まず, 次が成り立つことに注意しておくが, 証明については省略する.

補題 4.1. $E, F \in \mathcal{P}(S^2)$, $\rho \in SO(\mathbf{R}^3)$ とすると, 次が成り立つ.

(i) $\Phi(E) \subset \Phi(S^2) = B_1(0) \backslash \{0\}$.

(ii) $\Phi(E \cap F) = \Phi(E) \cap \Phi(F)$,
$\Phi(E \cup F) = \Phi(E) \cup \Phi(F)$.

(iii) $\rho(E) \in \mathcal{P}(S^2)$, $\Phi(\rho(E)) = \rho(\Phi(E))$. □

これを用いると, 次が得られる.

命題 4.3. $E, F \in \mathcal{P}(S^2)$, $E \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} F$ ならば, $\Phi(E) \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} \Phi(F)$ が成り立つ.

証明. 仮定より, $n \in \mathbf{N}$ 及び $\{E_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}}, \{F_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ が存在して,

$$E = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} E_i,\ F = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} F_i,$$
$$E_i \equiv_{\mathrm{r}} F_i \ \ (i \in \mathbf{N}_{1,n})$$

をみたす. 従って, 各 $i \in \mathbf{N}_{1,n}$ に対し, $\rho_i \in SO(\mathbf{R}^3)$ が存在して, $\rho_i(E_i) = F_i$ となる. このとき, 補題 4.1 (iii) によって

$$\Phi(F_i) = \Phi(\rho_i(E_i)) = \rho_i(\Phi(E_i)),$$
$$\Phi(E_i) \equiv_{\mathrm{r}} \Phi(F_i) \ \ (i \in \mathbf{N}_{1,n})$$

であり, 補題 4.1 (ii) によって

$$\Phi(E) = \Phi\Big(\bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} E_i\Big) = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \Phi(E_i),$$
$$\Phi(F) = \Phi\Big(\bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} F_i\Big) = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \Phi(F_i)$$

となるから, $\Phi(E) \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} \Phi(F)$ が成り立つ. □

5. 有限分割合同の Bernstein 型定理

次に, 有限分割合同に関する次の定理を証明する. これは, 集合の濃度に関する Bernstein の定理に類似した定理と考えることができる.

定理 5.1. $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ が $A \subset B \subset C$ かつ $A \overset{(*)}{\equiv} C$ をみたすならば, $A \overset{(*)}{\equiv} B \overset{(*)}{\equiv} C$ が成り立つ. □

以下において, この定理の証明について述べる. まず, 次を準備する.

補題 5.1. $A, B, \hat{A} \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ とし, $\hat{A} \subset A$ とすると, 次が成り立つ.

(i) $n \in \mathbf{N}$, $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}}, \{B_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ 及び $\{\xi_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset M(\mathbf{R}^3)$ は

$$A = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} A_i,\ B = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} B_i,$$
$$\xi_i(A_i) = B_i\ \ (i \in \mathbf{N}_{1,n})$$

をみたすとする．このとき，

$$\Xi(x) = \xi_i(x) \quad \text{for } x \in A_i\ \ (i \in \mathbf{N}_{1,n})$$

によって $\Xi : A \to \mathbf{R}^3$ を定義すると，$\Xi(\hat{A}) \subset B$ かつ $\hat{A} \overset{(*)}{\equiv} \Xi(\hat{A})$ が成り立つ．

(ii) $A \overset{(*)}{\equiv} B$ ならば，$\hat{B} \subset B$ かつ $\hat{A} \overset{(*)}{\equiv} \hat{B}$ をみたす $\hat{B} \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ が存在する．

証明． (i) $\hat{A} \cap A_i \subset A_i$, $\hat{A} \cap A_i \equiv \xi_i(\hat{A} \cap A_i)$ $(i \in \mathbf{N}_{1,n})$ であり，

$$\hat{A} = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} (\hat{A} \cap A_i),$$
$$\Xi(\hat{A}) = \Xi\Big(\bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} (\hat{A} \cap A_i)\Big) = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \Xi(\hat{A} \cap A_i)$$
$$= \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \xi_i(\hat{A} \cap A_i)$$

であるから，$\hat{A} \overset{(*)}{\equiv} \Xi(\hat{A})$ が成り立つ．

(ii) $A \overset{(*)}{\equiv} B$ であるから，(i) の仮定をみたす $n \in \mathbf{N}$, $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}}, \{B_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$, $\{\xi_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset M(\mathbf{R}^3)$ が存在する．このとき，(i) において $\hat{B} = \Xi(\hat{A})$ ととればよい． □

定理 5.1 の証明には次が本質的である．ここで，

$$\mathbf{N}_0 = \{0\} \cup \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

とする．

命題 5.1. $A, B, \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ が $\hat{A} \subset A$, $\hat{B} \subset B$ かつ $A \overset{(*)}{\equiv} \hat{B}$, $B \overset{(*)}{\equiv} \hat{A}$ をみたすならば，$A \overset{(*)}{\equiv} B$ が成り立つ．

証明． (a) $A \overset{(*)}{\equiv} \hat{B}$ より，$n \in \mathbf{N}$ 及び $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}}$, $\{\hat{B}_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ が存在して，

$$A = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} A_i,\ \hat{B} = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \hat{B}_i,$$
$$A_i \equiv \hat{B}_i\ \ (i \in \mathbf{N}_{1,n})$$

をみたす．従って，各 $i \in \mathbf{N}_{1,n}$ に対し，$\xi_i \in M(\mathbf{R}^3)$ が存在して，$\xi_i(A_i) = \hat{B}_i$ となる．このとき，

$$\Xi(x) = \xi_i(x) \quad \text{for } x \in A_i\ \ (i \in \mathbf{N}_{1,n})$$

によって $\Xi : A \to \mathbf{R}^3$ を定義すると，

$$\Xi(A) = \hat{B} \subset B$$

である．

また，$B \overset{(*)}{\equiv} \hat{A}$ より，$m \in \mathbf{N}$ 及び $\{B_j\}_{j \in \mathbf{N}_{1,m}}$, $\{\hat{A}_j\}_{j \in \mathbf{N}_{1,m}} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ が存在して，

$$B = \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,m}} B_j,\ \hat{A} = \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,m}} \hat{A}_j,$$
$$B_j \equiv \hat{A}_j\ \ (j \in \mathbf{N}_{1,m})$$

をみたす．従って，各 $j \in \mathbf{N}_{1,m}$ に対し，$\eta_j \in M(\mathbf{R}^3)$ が存在して，$\eta_j(B_j) = \hat{A}_j$ となる．このとき，

$$H(x) = \eta_j(x) \quad \text{for } x \in B_j\ \ (j \in \mathbf{N}_{1,m})$$

によって $H : B \to \mathbf{R}^3$ を定義すると，

$$H(B) = \hat{A} \subset A$$

である．

(b) (a) により，

$$[H \circ \Xi](A) = H(\Xi(A)) \subset H(B) = \hat{A} \subset A$$

であるから，

$$E_0 = A \setminus \hat{A}\,(\subset A),$$
$$E_k = [H \circ \Xi](E_{k-1})\,(\subset A)\ \ (k \in \mathbf{N})$$

によって，$\{E_k\}_{k \in \mathbf{N}_0} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ を定義することができる．そこで，

$$E = \bigcup_{k \in \mathbf{N}_0} E_k\,(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$$

とおくと，

$$E \subset A,\ E_0 \cap [H \circ \Xi](E) \subset (A \setminus \hat{A}) \cap \hat{A} = \phi$$

である．また，

$$[H \circ \Xi](E) = [H \circ \Xi]\Big(\bigcup_{k \in \mathbf{N}_0} E_k\Big)$$
$$= \bigcup_{k \in \mathbf{N}_0} [H \circ \Xi](E_k) = \bigcup_{k \in \mathbf{N}_0} E_{k+1}$$
$$= \bigcup_{k \in \mathbf{N}} E_k,$$
$$E = E_0 \cup \bigcup_{k \in \mathbf{N}} E_k = E_0 \cup [H \circ \Xi](E)$$

であるから，

$$E = E_0 \sqcup [H \circ \Xi](E),$$
$$E \setminus [H \circ \Xi](E) = E_0 = A \setminus \hat{A}$$

が得られ，

$$\hat{A} \setminus [H \circ \Xi](E) = A \setminus E$$

が成り立つ．このとき，$B \setminus \Xi(E) \subset B$ かつ

$$A \setminus E = \hat{A} \setminus [H \circ \Xi](E) = H(B) \setminus H(\Xi(E))$$
$$= H(B \setminus \Xi(E))$$

であるから，補題 5.1 (i) によって $B \setminus \Xi(E) \overset{(*)}{\equiv} A \setminus E$ が成り立つ．更に，$E \subset A$ であるから，補題 5.1 (i) によって $E \overset{(*)}{\equiv} \Xi(E)$ が得られ，注意 4.1 (ii) によって

$$A = (A \setminus E) \sqcup E \overset{(*)}{\equiv} (B \setminus \Xi(E)) \sqcup \Xi(E) = B$$

が成り立つ. □

これを用いて, 定理 5.1 を証明する.

定理 5.1 の証明. $\hat{B} = A, \hat{C} = B$ とおく.

$\hat{C} = B \subset C, C \overset{(*)}{\equiv} A$ であるから, 補題 5.1 (ii) により, $\hat{A} \subset A, \hat{C} \overset{(*)}{\equiv} \hat{A}$ をみたす $\hat{A} \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ が存在する. このとき,

$$\hat{A} \subset A,\ \hat{B} = A \subset B,\ A \overset{(*)}{\equiv} A = \hat{B},\ B = \hat{C} \overset{(*)}{\equiv} \hat{A}$$

であるから, 命題 5.1 によって $A \overset{(*)}{\equiv} B$ が成り立つ.

また,

$$\hat{B} = A \subset B,\ \hat{C} = B \subset C,$$
$$B \overset{(*)}{\equiv} B = \hat{C},\ C \overset{(*)}{\equiv} A = \hat{B}$$

であるから, 再び命題 5.1 によって $B \overset{(*)}{\equiv} C$ が成り立つ. □

6. 2 つの回転によって生成される群

ここでは, Hausdorff の定理を証明するための準備として, 次で定義される 2 つの回転によって生成される群を考える.

定義 6.1. $\varphi, \psi \in L(\mathbf{R}^3)$ を行列

$$\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi = \rho\Big[\frac{2\pi}{3}\Big] = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} & 0 \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

によって定義する. □

注意 6.1. 定義 6.1 において, $\varphi, \psi \in SO(\mathbf{R}^3)$ である. その回転軸は

$$\ell_\varphi = \{{}^{\mathrm{t}}(0,t,t) \in \mathbf{R}^3 \mid t \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}(e_1 + e_2),$$
$$\ell_\psi = \{{}^{\mathrm{t}}(0,0,t) \in \mathbf{R}^3 \mid t \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}e_3\,(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$$

と表され, φ は ℓ_φ を回転軸とする回転角 π の回転, ψ は ℓ_ψ を回転軸とする回転角 $\dfrac{2\pi}{3}$ の回転を表す. 特に,

$$\varphi^2 = \psi^3 = \iota,\ \varphi^{-1} = \varphi,\ \psi^{-1} = \psi^2\,(\in SO(\mathbf{R}^3))$$

である. □

これを用いて, 次のような回転の集合 (実際には群) を定義する.

定義 6.2. $G = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n \in SO(\mathbf{R}^3) \mid \rho_i \in \{\varphi, \psi\}\ (i \in \mathbf{N}_{1,n})\}$
$(\subset SO(\mathbf{R}^3))$

とおく. □

注意 6.2. (i) $\iota, \varphi\,(=\varphi^{-1}), \psi, \psi^2\,(=\psi^{-1}) \in G.$

(ii) $\rho, \sigma \in G \ \Rightarrow\ \rho\sigma \in G.$

(iii) $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \in \{\varphi, \psi, \psi^{-1}\}$
$\Rightarrow\ \rho_1\rho_2\cdots\rho_n \in G,$
$(\rho_1\rho_2\cdots\rho_n)^{-1} = \rho_n^{-1}\rho_{n-1}^{-1}\cdots\rho_1^{-1} \in G.$

(従って, G は $SO(\mathbf{R}^3)$ の部分群である.) □

ここでは次のような記号を用いることにする.

定義 6.3. (i) $\tilde{\psi}_i = \psi^{i_1}\varphi\psi^{i_2}\varphi\cdots\varphi\psi^{i_k} \in G$
for $i = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \{-1,1\}^k$, $k \in \mathbf{N}$.

(ii) $K = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \{\tilde{\psi}_i \in G \mid i \in \{-1,1\}^k\},$

$K_+ = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \{\tilde{\psi}_i \in G \mid i \in \{1\}^k\}$
$= \{\psi\varphi\psi\varphi\cdots\varphi\psi\}_{k \in \mathbf{N}}\,(\in \mathcal{P}(G)).$ □

このとき, 次が成り立つ. 以下において,

$$\sigma L = \{\sigma\rho \in G \mid \rho \in L\},$$
$$L\sigma = \{\rho\sigma \in G \mid \rho \in L\}\,(\in \mathcal{P}(G))$$
$$\text{for } \sigma \in G,\ L \in \mathcal{P}(G)$$

のような記号を用いることにする. また, $\mathbf{Z}$ は整数全体の集合を表す.

命題 6.1. (i) $\iota \notin \{\varphi\} \cup K \cup \varphi K \cup K\varphi \cup \varphi K\varphi.$

(ii) $i \in \{-1,1\}^k,\ j \in \{-1,1\}^l,\ \tilde{\psi}_i = \tilde{\psi}_j$
$\Rightarrow\ k = l\,(\in \mathbf{N}),\ i = j\,(\in \{-1,1\}^k).$

証明. (i)(a) $\varphi, \psi, \varphi\psi, \psi\varphi, \varphi\psi\varphi \neq \iota$

であることは直接計算による.

(b) $k \geq 2$ のとき, k に関する帰納法を用いると, $i \in \{-1,1\}^k$ に対し, $l_i, m_i, n_i, \tilde{l}_i, \tilde{m}_i, \tilde{n}_i \in \mathbf{Z}$ が存在して

$$\begin{aligned}
&\tilde{\psi}_i e_1 \\
&= \frac{1}{2^k}{}^{\mathrm{t}}(2l_i+1, \sqrt{3}(2m_i+1), 2\sqrt{3}(2n_i+1)), \\
&\varphi\tilde{\psi}_i e_1 \\
&= \frac{1}{2^k}{}^{\mathrm{t}}(-(2l_i+1), 2\sqrt{3}(2n_i+1), \sqrt{3}(2m_i+1)), \\
&\tilde{\psi}_i\varphi e_1 \\
&= \frac{1}{2^k}{}^{\mathrm{t}}(2\tilde{l}_i+1, \sqrt{3}(2\tilde{m}_i+1), 2\sqrt{3}(2\tilde{n}_i+1)), \\
&\varphi\tilde{\psi}_i\varphi e_1 \\
&= \frac{1}{2^k}{}^{\mathrm{t}}(-(2\tilde{l}_i+1), 2\sqrt{3}(2\tilde{n}_i+1), \sqrt{3}(2\tilde{m}_i+1))
\end{aligned}$$

と表されることが分かる. 従って, これらはすべて $e_1 = {}^{\mathrm{t}}(1,0,0)$ とは異なるから,

$$\tilde{\psi}_i, \varphi\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_i\varphi, \varphi\tilde{\psi}_i\varphi \neq \iota$$

が得られ, 主張が従う.

(ii) $k \leq l$ とし, $\tilde{\psi}_i = \tilde{\psi}_j$,

$$i = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \{-1,1\}^k,$$
$$j = (j_1, j_2, \ldots, j_l) \in \{-1,1\}^l$$

と仮定すると, 注意 6.2 (iii), 注意 6.1 によって

$$\begin{aligned}
\iota &= \tilde{\psi}_i^{-1}\tilde{\psi}_j \\
&= \psi^{-i_k}\varphi\psi^{-i_{k-1}}\varphi\cdots\varphi\psi^{-i_1}\psi^{j_1}\varphi\psi^{j_2}\varphi\cdots\varphi\psi^{j_l}
\end{aligned}$$

と表される.

(a) $1 \leq n \leq k$ とし,

$$i_m = j_m \ \ (m \in \mathbf{N}_{1,n-1}), \ \ i_n \neq j_n$$

と仮定すると, $\psi^{j_n - i_n} \in \{\psi, \psi^{-1}\}$,

$$\begin{aligned}
\iota &= \psi^{-i_k}\varphi\cdots\varphi\psi^{-i_{n-1}}\varphi\psi^{j_n-i_n}\varphi\psi^{j_{n+1}}\varphi\cdots\varphi\psi^{j_l} \\
&\in K
\end{aligned}$$

となるから, これは (i) に矛盾する.

従って, $i_m = j_m$ $(m \in \mathbf{N}_{1,k})$ が成り立つ.

(b) もし, $k < l$ ならば,

$$\iota = \varphi\psi^{j_{k+1}}\varphi\psi^{j_{k+2}}\varphi\cdots\varphi\psi^{j_l} \in \varphi K$$

となるから, これは (i) に矛盾する.

従って, $k = l$ であるから, (a) と合わせて, $i = j \in \{-1,1\}^k$ が成り立つ. □

これを用いると, 次が成り立つことが分かるが, その証明は省略する.

命題 6.2. $G = \{\iota\} \sqcup \{\varphi\} \sqcup K \sqcup \varphi K \sqcup K\varphi \sqcup \varphi K\varphi$ が成り立つ. □

いま, 次の集合を定義する.

定義 6.4. $J = \{\iota\} \cup \varphi K \cup K_+\varphi \cup \varphi(K \setminus K_+)\varphi$ $(\in \mathcal{P}(G))$

とおく. □

このとき, 群 G を J を用いて次のように分割することができ, この事実が 7 節で述べる Hausdorff の定理の証明の鍵となる.

命題 6.3. $\varphi J = \psi J \sqcup \psi^{-1}J,$

$$G = J \sqcup \varphi J = J \sqcup \psi J \sqcup \psi^{-1}J$$

が成り立つ.

証明. (a) $K = (\{\psi\} \cup \psi\varphi K) \cup (\{\psi^{-1}\} \cup \psi^{-1}\varphi K),$

$$K_+ = \{\psi\} \cup \psi\varphi K_+$$

が成り立つことに注意する. これを用いると,

$$\begin{aligned}
K \setminus K_+ &= ((\{\psi\} \cup \psi\varphi K) \cup (\{\psi^{-1}\} \cup \psi^{-1}\varphi K)) \\
&\quad \setminus (\{\psi\} \cup \psi\varphi K_+) \\
&= (\psi\varphi K \setminus \psi\varphi K_+) \cup \{\psi^{-1}\} \cup \psi^{-1}\varphi K \\
&= \{\psi^{-1}\} \cup \psi^{-1}\varphi K \cup \psi\varphi(K \setminus K_+)
\end{aligned}$$

が得られる.

(b) 注意 6.1 を用いると,

$$\varphi J = \{\varphi\} \cup K \cup \varphi K_+\varphi \cup (K \setminus K_+)\varphi$$

が成り立つ. また (a) により, $K_+ = \{\psi\} \cup \psi\varphi K_+$ であるから,

$$\begin{aligned}
\psi J &= \{\psi\} \cup \psi\varphi K \cup \psi(\{\psi\} \cup \psi\varphi K_+)\varphi \\
&\quad \cup \psi\varphi(K \setminus K_+)\varphi \\
&= (\{\psi\} \cup \psi\varphi K) \cup (\{\psi^{-1}\varphi\} \cup \psi^{-1}\varphi K_+\varphi) \\
&\quad \cup \psi\varphi(K \setminus K_+)\varphi, \\
\psi^{-1}J &= \{\psi^{-1}\} \cup \psi^{-1}\varphi K \cup \psi^{-1}(\{\psi\} \cup \psi^{-1}\varphi K_+)\varphi \\
&\quad \cup \psi^{-1}\varphi(K \setminus K_+)\varphi \\
&= (\{\psi^{-1}\} \cup \psi^{-1}\varphi K) \cup (\{\varphi\} \cup \varphi K_+\varphi) \\
&\quad \cup \psi^{-1}\varphi(K \setminus K_+)\varphi
\end{aligned}$$

が得られる. 従って, 命題 6.1 を用いることにより,

$$\psi J \cap \psi^{-1}J = J \cap \varphi J = \phi$$

が成り立つ.

(c) (b), (a) によって

$$\begin{aligned}
&\psi J \cup \psi^{-1}J \\
&= [(\{\psi\} \cup \psi\varphi K) \cup (\{\psi^{-1}\varphi\} \cup \psi^{-1}\varphi K_+\varphi) \\
&\quad \cup \psi\varphi(K \setminus K_+)\varphi] \\
&\quad \cup [(\{\psi^{-1}\} \cup \psi^{-1}\varphi K) \cup (\{\varphi\} \cup \varphi K_+\varphi) \\
&\quad \cup \psi^{-1}\varphi(K \setminus K_+)\varphi]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\varphi\} \cup \varphi K_+ \varphi \\
&\quad \cup ((\{\psi\} \cup \psi\varphi K) \cup (\{\psi^{-1}\} \cup \psi^{-1}\varphi K)) \\
&\quad \cup [\{\psi^{-1}\varphi\} \cup \psi^{-1}\varphi K_+ \varphi \cup \psi^{-1}\varphi(K \setminus K_+)\varphi \\
&\qquad \cup \psi\varphi(K \setminus K_+)\varphi] \\
&= \{\varphi\} \cup \varphi K_+ \varphi \cup K \\
&\quad \cup (\{\psi^{-1}\} \cup \psi^{-1}\varphi K \cup \psi\varphi(K \setminus K_+))\varphi \\
&= \{\varphi\} \cup K \cup \varphi K_+ \varphi \cup (K \setminus K_+)\varphi \\
&= \varphi J
\end{aligned}
$$

が成り立つ. また, 命題 3.2 と合わせると,

$$
\begin{aligned}
&\quad J \cup \varphi J \\
&= (\{\iota\} \cup \varphi K \cup K_+ \varphi \cup \varphi(K \setminus K_+)\varphi) \\
&\quad \cup (\{\varphi\} \cup K \cup \varphi K_+ \varphi \cup (K \setminus K_+)\varphi) \\
&= \{\iota\} \cup \{\varphi\} \cup K \cup \varphi K \cup (K_+ \varphi \cup (K \setminus K_+)\varphi) \\
&\quad \cup (\varphi K_+ \varphi \cup \varphi(K \setminus K_+)\varphi) \\
&= \{\iota\} \cup \{\varphi\} \cup K \cup \varphi K \cup K\varphi \cup \varphi K\varphi \\
&= G
\end{aligned}
$$

が得られる. よって, (b) と合わせると, 主張が成り立つ. □

7. Hausdorff の定理

次に, 3 節, 6 節で得られた事実と共に, 定理 2.2 を用いることによって, Hausdorff の定理を証明する. この定理は Banach-Tarski の定理の証明の鍵となる事実であり, (少し慣れた人にとっては) やはり直観的に理解し難いものであると言ってよいであろう. その証明には定理 2.2 も用いるので, 選択公理を本質的に用いることになる. ここで, $\varphi, \psi \in SO(\mathbf{R}^3)$ (及び G, J) は定義 6.1 (及び定義 6.2, 定義 6.4) のものである.

また, 集合 D が可算であるとは, D から自然数全体の集合 $\mathbf{N}$ への全単射が存在することである. 定義 6.2 の G は可算集合であり, $\mathbf{R}$ 及び (原点を中心とする単位球面) S^2 は非可算集合 ($\mathbf{N}$ より真に濃度の大きい集合) であることに注意する.

定理 7.1 (Hausdorff の定理). $E, D \in \mathcal{P}(S^2)$ で, D は可算集合かつ

$$
\begin{aligned}
S^2 &= E \sqcup \psi(E) \sqcup \psi^{-1}(E) \sqcup D, \\
\varphi(E) &= \psi(E) \sqcup \psi^{-1}(E)
\end{aligned}
$$

をみたすものが存在する. 特に,

$$
\begin{aligned}
E &\equiv_{\mathrm{r}} \psi(E) \equiv_{\mathrm{r}} \psi^{-1}(E) \\
&\equiv_{\mathrm{r}} \varphi(E) = \psi(E) \sqcup \psi^{-1}(E)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

証明. (a) $\rho \in G \setminus \{\iota\}$ とすると, 注意 3.1 (iv) によって ρ の回転軸 ℓ_ρ が定まり, $S^2 \cap \ell_\rho$ は 2 点からなる集合である. そこで,

$$
D = \bigcup_{\rho \in G \setminus \{\iota\}} (S^2 \cap \ell_\rho)\,(\in \mathcal{P}(S^2))
$$

とおくと, $G \setminus \{\iota\}$ は可算集合であるから, D も可算集合である.

(b) $\qquad \rho(D) = D \quad \text{for } \rho \in G$

が成り立つことを示す. $\rho = \iota$ のときは明らかであるから, $\rho \in G \setminus \{\iota\}$ とする.

($\subset$) $x \in D$ とすると, $\sigma \in G \setminus \{\iota\}$ が存在して, $x \in S^2 \cap \ell_\sigma \subset \ell_\sigma$ となるが, 注意 3.2 (iv) によって $\sigma x = x$ である. このとき, $\rho\sigma\rho^{-1} \in G \setminus \{\iota\}$ であり,

$$
\rho\sigma\rho^{-1}(\rho x) = \rho\sigma x = \rho x
$$

となるから, 注意 3.2 (iv), (ii) によって

$$
\rho x \in S^2 \cap \ell_{\rho\sigma\rho^{-1}} \subset D
$$

が成り立つ.

($\supset$) $\rho^{-1} \in G \setminus \{\iota\}$ であるから, 前述より, $\rho^{-1}(D) \subset D$ が成り立つ. 従って,

$$
D = \rho(\rho^{-1}(D)) \subset \rho(D)
$$

が成り立つ.

(c) $\rho \in G$ とすると, 注意 3.2 (ii) によって $\rho(S^2) = S^2$ であるから, (b) によって

$$
\rho(S^2 \setminus D) = \rho(S^2) \setminus \rho(D) = S^2 \setminus D
$$

が成り立つ.

(d) $x, y \in S^2$ に対し,

$$
x \overset{G}{\sim} y \iff \sigma \in G \text{ が存在して } y = \sigma x
$$

として S^2 上の二項関係 '$\overset{G}{\sim}$' を定義すると, 注意 4.2 を用いることにより, これは S^2 上の同値関係となることが分かる. 従って, 注意 2.1 により, '$\overset{G}{\sim}$' (を $S^2 \setminus D$ 上に制限した二項関係) は $S^2 \setminus D$ 上の同値関係である. そこで, $x \in S^2 \setminus D$ に対し, その同値類を $[x]_G\,(\in \mathcal{P}(S^2 \setminus D))$ と表すことにする. このとき, 定理 2.2 により, $Z \in \mathcal{P}(S^2 \setminus D)$ が存在して,

$$
S^2 \setminus D = \bigsqcup_{z \in Z} [z]_G
$$

と表すことができる．ここで，$Z \subset S^2 \setminus D$ であるから，(c) によって

$$\rho(Z) \subset \rho(S^2 \setminus D) = S^2 \setminus D \quad \text{for } \rho \in G$$

が成り立つ．

(e) 定義 6.4 の記号を用いて

$$E = \bigcup_{\sigma \in J} \sigma(Z)\,(\in \mathcal{P}(S^2))$$

とおく．このとき，(d) によって $E \subset S^2 \setminus D$ かつ

$$\begin{aligned}\psi(E) &= \psi\Big(\bigcup_{\sigma \in J} \sigma(Z)\Big) = \bigcup_{\sigma \in J} \psi\sigma(Z)\\ &= \bigcup_{\rho \in \psi J} \rho(Z) \subset S^2 \setminus D,\\ \psi^{-1}(E) &= \psi^{-1}\Big(\bigcup_{\sigma \in J} \sigma(Z)\Big) = \bigcup_{\sigma \in J} \psi^{-1}\sigma(Z)\\ &= \bigcup_{\rho \in \psi^{-1} J} \rho(Z) \subset S^2 \setminus D\end{aligned}$$

が成り立つ．従って，命題 6.3 により，

$$\begin{aligned}\varphi(E) &= \varphi\Big(\bigcup_{\sigma \in J} \sigma(Z)\Big) = \bigcup_{\sigma \in J} \varphi\sigma(Z)\\ &= \bigcup_{\rho \in \varphi J} \rho(Z) = \bigcup_{\rho \in \psi J \cup \psi^{-1} J} \rho(Z)\\ &= \Big(\bigcup_{\rho \in \psi J} \rho(Z)\Big) \cup \Big(\bigcup_{\rho \in \psi^{-1} J} \rho(Z)\Big)\\ &= \psi(E) \cup \psi^{-1}(E)\end{aligned}$$

が成り立つ．

(f) $\quad S^2 \setminus D = E \cup \psi(E) \cup \psi^{-1}(E)$

が成り立つことを示す．

($\supset$) (e) による．

($\subset$) $x \in S^2 \setminus D$ とすると，(d) によって，$z \in Z$ が存在して $x \in [z]_G$ となり，$\rho \in G$ が存在して $x = \rho z$ が成り立つ．ここで，命題 6.3 によって

$$\rho \in G = J \sqcup \psi J \sqcup \psi^{-1} J$$

であるから，(e) を用いると，$\rho \in J$ のとき，

$$x = \rho z \in \rho(Z) \subset \bigcup_{\sigma \in J} \sigma(Z) = E,$$

$\rho \in \psi J$ のとき，

$$x = \rho z \in \rho(Z) \subset \bigcup_{\sigma \in \psi J} \sigma(Z) = \psi(E),$$

$\rho \in \psi^{-1} J$ のとき，

$$x = \rho z \in \rho(Z) \subset \bigcup_{\sigma \in \psi^{-1} J} \sigma(Z) = \psi^{-1}(E)$$

が成り立つ．

(g) $$\begin{aligned}E \cap \psi(E) &= E \cap \psi^{-1}(E)\\ &= \psi(E) \cap \psi^{-1}(E) = \phi\end{aligned}$$

が成り立つ．ここでは，

$$E \cap \psi(E) = \phi$$

のみ示すことにする．

$E \cap \psi(E) \neq \phi$ と仮定し，$x \in E \cap \psi(E)$ をとる．(e) によって

$$x \in E = \bigcup_{\sigma \in J} \sigma(Z),\ x \in \psi(E) = \bigcup_{\rho \in \psi J} \rho(Z)$$

であるから，$\sigma \in J$, $\rho \in \psi J$ が存在して，$x \in \sigma(Z)$, $x \in \rho(Z)$ となり，$z, y \in Z$ が存在して，$x = \sigma z = \rho y$ が成り立つ．このとき，

$$\begin{aligned}&\sigma^{-1}\rho \in G,\ \sigma z = x = \rho y,\ z = \sigma^{-1}\rho y,\\ &z \overset{G}{\sim} y,\ [z]_G = [y]_G\end{aligned}$$

となるから，(d) によって $z = y$ が成り立つ．

これより，$\sigma = \rho$ が成り立つ．実際，もし $\sigma \neq \rho$ ならば，

$$\sigma^{-1}\rho \in G \setminus \{\iota\},\ z = \sigma^{-1}\rho y = \sigma^{-1}\rho z$$

であるから，(a) によって $z \in S^2 \cap \ell_{\sigma^{-1}\rho} \subset D$ が得られ，$z \in Z \subset S^2 \setminus D$ に矛盾する．

従って，$\sigma = \rho \in J \cap \psi J \neq \phi$ となり，命題 6.3 に矛盾する．

(h) (f), (g) によって

$$\begin{aligned}S^2 \setminus D &= E \sqcup \psi(E) \sqcup \psi^{-1}(E),\\ S^2 &= E \sqcup \psi(E) \sqcup \psi^{-1}(E) \sqcup D\end{aligned}$$

が成り立つ．　□

8. 有限分割による球面の増殖

次に，Hausdorff の定理の応用として，次の事実を証明する．数学に少し慣れた人にとっては，Hausdorff の定理が成り立つこと自体，かなり奇妙に感じると思われるが，次の定理 8.1 は，いわば‘球面を有限分割によって増殖させることができる’という定理であり，あまり数学に慣れていない人にとっても奇妙に感じられるものではないかと思う．

ここで，$a \in \mathbf{R}^3$ に対し，

$$S^2(a) = a + S^2\,(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$$

は a を中心とする $\mathbf{R}^3$ の単位球面である．$a, b, \in \mathbf{R}^3$, $|a - b| > 2$ とすると，$S^2(a) \cap S^2(b) = \phi$ であり，例 4.1 (ii) によって $S^2(a) \equiv S^2(b)$ であることに注意する．

定理 8.1. $a, b \in \mathbf{R}^3$, $|a - b| > 2$ とすると，

$$S^2 \overset{(*)}{\equiv} S^2(a) \sqcup S^2(b)$$

が成り立つ. □

定理 8.1 の証明には, 次の命題が本質的である.

命題 8.1. $D \in \mathcal{P}(S^2)$ を可算集合とすると,

$$S^2 \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} S^2 \setminus D$$

が成り立つ.

証明. (a) $D \subset S^2$ より,

$$-D \subset S^2,\ D \cup (-D) \subset S^2$$

であり, D は可算集合であるから, $-D, D \cup (-D)$ は可算集合である. また, S^2 は非可算集合であるから,

$$S^2 \setminus (D \cup (-D)) \neq \phi$$

が成り立つ.

そこで, $e \in S^2 \setminus (D \cup (-D))$ を 1 つとり, 例 3.2 を用いて,

$$\rho[e;\theta] = \xi[0,e;\theta] = \sigma[e]\rho[\theta]\sigma[e]^{-1} \quad (\in SO(\mathbf{R}^3)) \quad \text{for } \theta \in \mathbf{R}$$

とおくと, $\rho[e;\theta]$ は

$$\ell[e] = \ell[0,e] = \mathbf{R}e\,(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$$

を回転軸とする回転角 θ の回転である.

(b) $$\Theta_1[p,q] = \{\theta \in \mathbf{R} \mid \rho[e;\theta]p = q\} \quad (\in \mathcal{P}(\mathbf{R})) \quad \text{for } p,q \in S^2$$

とおく. このとき, $p,q \in S^2$ に対し, $\Theta_1[p,q]$ は高々可算である. 実際, $\Theta_1[p,q] \neq \phi$ と仮定し, $\theta_1[p,q] \in \Theta_1[p,q]$ を 1 つとると, 例 3.2 を用いることにより,

$$\Theta_1[p,q] = \theta_1[p,q] + 2\pi\mathbf{Z}$$

が成り立つことが分かる.

そこで,

$$\Theta_1[q] = \{\theta \in \mathbf{R} \mid q \in \rho[e;\theta](D)\} = \bigcup_{p \in D} \Theta_1[p,q]\,(\in \mathcal{P}(\mathbf{R})) \quad \text{for } q \in S^2$$

とおくと, D が可算であることから, $q \in S^2$ に対して $\Theta_1[q]$ は高々可算である. 従って, $\bigcup_{q \in D} \Theta_1[q]$ も高々可算である.

(c) $$\Theta_1 = \{\theta \in \mathbf{R} \mid D \cap \rho[e;\theta](D) \neq \phi\} \quad (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}))$$

とおくと,

$$\Theta_1 \subset \bigcup_{q \in D} \Theta_1[q]$$

であり, (b) によって $\bigcup_{q \in D} \Theta_1[q]$ は高々可算であるから, Θ_1 も高々可算である. そこで,

$$\Theta = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{n}\Theta_1\,(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}))$$

とおくと, 各 $\frac{1}{n}\Theta_1$ $(n \in \mathbf{N})$ は高々可算であるから, Θ は高々可算である.

また, 例 3.2 によって

$$\rho[e;\theta]^n = \rho[e;n\theta] \quad \text{for } \theta \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}$$

であるから, $\theta \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ に対し,

$$\begin{aligned} \theta \in \frac{1}{n}\Theta_1 &\iff n\theta \in \Theta_1 \\ &\iff D \cap \rho[e;n\theta](D) \neq \phi \\ &\iff D \cap \rho[e;\theta]^n(D) \neq \phi \end{aligned}$$

成り立つ. 従って,

$$D \cap \rho[e;\theta]^n(D) \neq \phi \quad \text{for all } \theta \in \mathbf{R} \setminus \Theta,\ n \in \mathbf{N}$$

が得られる.

(d) $\mathbf{R}$ は非可算集合であり, (c) によって Θ は高々可算な集合であるから, $\mathbf{R} \setminus \Theta \neq \phi$ である. そこで, $\theta_0 \in \mathbf{R} \setminus \Theta$ を 1 つとり,

$$D_0 = D \cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \rho[e;\theta_0]^n(D) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}_0} \rho[e;\theta_0]^n(D) \quad (\in \mathcal{P}(S^2))$$

このとき, (c) によって

$$D \cap \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \rho[e;\theta_0]^n(D) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (D \cap \rho[e;\theta_0]^n(D)) = \phi$$

であるから,

$$D_0 \setminus D = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \rho[e;\theta_0]^n(D)$$

が成り立つ. 従って,

$$\begin{aligned} \rho[e;\theta_0](D_0) &= \rho[e;\theta_0]\Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}_0} \rho[e;\theta_0]^n(D)\Big) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbf{N}_0} \rho[e;\theta_0]^{n+1}(D) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \rho[e;\theta_0]^n(D) = D_0 \setminus D \end{aligned}$$

が得られ, $D_0 \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} D_0 \setminus D$ が成り立つ. 更に,

$$S^2 = (S^2 \setminus D_0) \sqcup D_0,$$
$$S^2 \setminus D = (S^2 \setminus D_0) \sqcup (D_0 \setminus D)$$

であるから, 注意 4.2 (ii) によって $S^2 \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} S^2 \setminus D$ が従う. □

Hausdorff の定理と命題 8.1 から, 次が得られる.

命題 8.2. $T_1, T_2 \in \mathcal{P}(S^2)$ で,

$$S^2 = T_1 \sqcup T_2,\ S^2 \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} T_1,\ S^2 \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} T_2$$

をみたすものが存在する.

証明. 定理 7.1 (Hausdorff の定理) により, $\varphi, \psi \in SO(\mathbf{R}^3)$ 及び $E, D \in \mathcal{P}(S^2)$ が存在して, D は可算集合かつ

$$S^2 = E \sqcup \psi(E) \sqcup \psi^{-1}(E) \sqcup D,$$
$$\varphi(E) = \psi(E) \sqcup \psi^{-1}(E)$$

が成り立つ. このとき,

$$T_1 = E \sqcup \psi(E) \sqcup D,\ T_2 = \psi^{-1}(E)\,(\in \mathcal{P}(S^2))$$

とおくと, $S^2 = T_1 \sqcup T_2$ である. 更に,

$$\psi(E) \equiv_{\mathrm{r}} \psi^{-1}(E) \equiv_{\mathrm{r}} \varphi(E) = \psi(E) \sqcup \psi^{-1}(E)$$

であり, 命題 7.1 によって $S^2 \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} S^2 \setminus D$ であるから, 命題 4.2 を用いることにより,

$$\begin{aligned} T_1 &= E \sqcup \psi(E) \sqcup D \\ &\overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} E \sqcup (\psi(E) \sqcup \psi^{-1}(E)) \sqcup D = S^2, \\ T_2 &= \psi^{-1}(E) \equiv_{\mathrm{r}} \psi(E) \sqcup \psi^{-1}(E) \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} E \sqcup \psi^{-1}(E) \\ &\overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} E \sqcup (\psi(E) \sqcup \psi^{-1}(E)) = S^2 \setminus D \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} S^2 \end{aligned}$$

が成り立つ. □

定理 8.1 の証明. 例 4.1 (ii) によって, $S^2 \equiv S^2(a) \equiv S^2(b)$ である. また, 命題 8.2 により, $T_1, T_2 \in \mathcal{P}(S^2)$ で,

$$S^2 = T_1 \sqcup T_2,\ S^2 \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} T_1,\ S^2 \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} T_2$$

をみたすものが存在する. このとき, 注意 4.2 (iii) によって

$$S^2(a) \equiv S^2 \overset{(*)}{\equiv} T_1,\ S^2(b) \equiv S^2 \overset{(*)}{\equiv} T_2$$

であり, $S^2(a) \cap S^2(b) = \phi$ であることに注意すると, 注意 4.1 (ii) を用いることにより,

$$S^2 = T_1 \sqcup T_2 \overset{(*)}{\equiv} S^2(a) \sqcup S^2(b)$$

が得られる. □

9. 有限分割による開球の増殖

ここでは, 単位球面に対して 8 節で得られた事実に相当することを, 単位開球の場合に証明する. これは例 1.1 (ii) の特別な場合である.

定理 9.1. $a, b \in \mathbf{R}^3$, $|a-b| > 2$ とすると,

$$B_1(0) \overset{(*)}{\equiv} B_1(a) \sqcup B_1(b)$$

が成り立つ. □

まず, 次を証明する. ここで, $x, y \in \mathbf{R}^3$ に対し, $x \cdot y\,(\in \mathbf{R})$ は x と y の内積を表す.

命題 9.1. $B_1(0) \overset{(*)}{\equiv} B_1(0) \setminus \{0\}$

が成り立つ.

証明. $C_1 = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x \cdot e_3 = 0,\ \left| x - \frac{1}{3} e_1 \right| = \frac{1}{3} \right\}$ $(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$

とおくと, C_1 は 2 つの vector $e_1, e_2\,(\in \mathbf{R}^3)$ によって張られる (原点を通り, $e_3\,(\in \mathbf{R}^3)$ に直交する) 平面内の中心 $\frac{1}{3} e_1$, 半径 $\frac{1}{3}$ の円であり, これは原点 $0\,(\in \mathbf{R}^3)$ を通る. そこで, 例 3.2 に従い,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi\Big[\frac{1}{3} e_1, e_3; 1\Big] \\ &= \tau\Big[-\frac{1}{3} e_1\Big] \circ \sigma[e_3] \rho[1] \sigma[e_3]^{-1} \circ \tau\Big[\frac{1}{3} e_1\Big] \\ &\quad (\in M(\mathbf{R}^3)) \end{aligned}$$

とおくと, ξ_1 は

$$\ell\Big[\frac{1}{3} e_1, e_3\Big] = \frac{1}{3} e_1 + \mathbf{R} e_3\,(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$$

を回転軸とする回転角 1 の回転であり,

$$\xi_1(C_1) = C_1$$

をみたす. このとき, $n \notin 2\pi \mathbf{Z}$ for $n \in \mathbf{N}$ であるから, $\{\xi_1^n(0)\}_{n \in \mathbf{N}} \subset C_1 \setminus \{0\}$ が得られ, 例 3.2 によって

$$\xi_1^{-m}(\xi_1^n(0)) = \xi_1^{n-m}(0) \neq 0,\ \xi_1^n(0) \neq \xi_1^m(0)$$
$$(m < n \in \mathbf{N})$$

が成り立つ. そこで,

$$E_1 = \{\xi_1^n(0)\}_{n \in \mathbf{N}},\ F_1 = \{0\} \cup E_1,$$
$$E_2 = F_2 = C_1 \setminus E_1$$

とおくと,

$$C_1 \setminus \{0\} = E_1 \sqcup E_2,\ C_1 = F_1 \sqcup F_2$$

であり,

$$\begin{aligned} \xi_1(F_1) &= \xi_1(\{0\} \cup \{\xi_1^n(0)\}_{n \in \mathbf{N}}) \\ &= \{\xi_1(0)\} \cup \{\xi_1^{n+1}(0)\}_{n \in \mathbf{N}} = \{\xi_1^n(0)\}_{n \in \mathbf{N}} \\ &= E_1 \end{aligned}$$

となるから, $E_1 \equiv F_1$ であり, $E_2 \equiv F_2$ であるから, $C_1 \setminus \{0\} \overset{(*)}{\equiv} C_1$ が成り立つ. 更に,

$$B_1(0) = C_1 \sqcup (B_1(0) \setminus C_1),$$
$$B_1(0) \setminus \{0\} = (C_1 \setminus \{0\}) \sqcup (B_1(0) \setminus C_1)$$

であるから, 注意 4.1 (ii) より, $B_1(0) \overset{(*)}{\equiv} B_1(0) \setminus \{0\}$ が得られる. □

命題 8.2 と合わせると, 次が得られる.

命題 9.2. $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ で,

$$B_1(0) = A_1 \sqcup A_2,\ B_1(0) \overset{(*)}{\equiv} A_1,\ B_1(0) \overset{(*)}{\equiv} A_2$$

をみたすものが存在する.

証明. 命題 8.2 により, $T_1, T_2 \in \mathcal{P}(S^2)$ で,

$$S^2 = T_1 \sqcup T_2,\ S^2 \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} T_1,\ S^2 \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} T_2$$

をみたすものが存在する. このとき, 定義 4.3 の $\Phi : \mathcal{P}(S^2) \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ を用いると, 補題 4.1 (ii), 命題 4.3 によって

$$\Phi(S^2) = \Phi(T_1) \sqcup \Phi(T_2),$$
$$\Phi(S^2) \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} \Phi(T_1),\ \Phi(S^2) \overset{(*)}{\equiv}_{\mathrm{r}} \Phi(T_2)$$

が成り立つ. ここで, $0 \notin \Phi(T_2)$ であるから,

$$A_1 = \Phi(T_1),\ A_2 = \Phi(T_2) \sqcup \{0\}\ (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$$

とおくと, 補題 4.1 (i) によって

$$\begin{aligned} B_1(0) &= (B_1(0) \setminus \{0\}) \sqcup \{0\} = \Phi(S^2) \sqcup \{0\} \\ &= \Phi(T_1) \sqcup \Phi(T_2) \sqcup \{0\} = A_1 \sqcup A_2 \end{aligned}$$

が得られる. 更に, 命題 9.1, 注意 4.1 (ii), 注意 4.2 (iii) によって

$$\begin{aligned} A_1 &= \Phi(T_1) \overset{(*)}{\equiv} \Phi(S^2) = B_1(0) \setminus \{0\} \overset{(*)}{\equiv} B_1(0), \\ A_2 &= \Phi(T_2) \sqcup \{0\} \overset{(*)}{\equiv} \Phi(S^2) \sqcup \{0\} \\ &= (B_1(0) \setminus \{0\}) \sqcup \{0\} = B_1(0) \end{aligned}$$

が成り立つ. □

これより, 定理 9.1 が得られる.

定理 9.1 の証明. 命題 9.2 より, $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ で,

$$B_1(0) = A_1 \sqcup A_2,\ B_1(0) \overset{(*)}{\equiv} A_1,\ B_1(0) \overset{(*)}{\equiv} A_2$$

をみたすものが存在する. このとき, $B_1(a) \cap B_1(b) = \phi$ であり, 例 4.1 (i) によって $B_1(a) \equiv B_1(b) \equiv B_1(0)$ であるから, $B_1(a) \overset{(*)}{\equiv} A_1$, $B_1(b) \overset{(*)}{\equiv} A_2$ であり, 注意 4.1 (ii) によって

$$B_1(a) \sqcup B_1(b) \overset{(*)}{\equiv} A_1 \sqcup A_2 \overset{(*)}{\equiv} B_1(0)$$

が成り立つ. □

定理 9.1 によって次が得られるが, 証明は省略する.

系 9.1. $r \in (0, \infty)$ とすると, 次が成り立つ.

(i) $a, b \in \mathbf{R}^3$, $|a - b| > 2r$ ならば,

$$B_r(0) \overset{(*)}{\equiv} B_r(a) \sqcup B_r(b).$$

(ii) $n \in \mathbf{N}$, $\{a_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathbf{R}^3$, $|a_i - a_j| > 2r$ $(i \neq j \in \mathbf{N}_{1,n})$ ならば,

$$B_r(0) \overset{(*)}{\equiv} \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} B_r(a_i).$$ □

10. Banach-Tarski の定理の証明

最後に. 定理 5.1, 系 9.1 を用いて定理 1.1 (Banach-Tarski の定理) を証明する. このためには次の命題が本質的である.

命題 10.1. $r \in (0, \infty)$, $a \in \mathbf{R}^3$ とし, $A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ が有界かつ $B_r(a) \subset A$ をみたすならば,

$$A \overset{(*)}{\equiv} B_r(a)$$

が成り立つ.

証明. (a) $A_0 = A \setminus B_r(a)\ (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$

とおくと, $A = B_r(a) \sqcup A_0$ であり, A_0 は有界であるから, $n \in \mathbf{N}$ 及び $\{a_j\}_{j \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathbf{R}^3$ が存在して,

$$A_0 \subset \bigcup_{j \in \mathbf{N}_{1,n}} B_r(a_j)$$

が成り立つ. このとき,

$$A_1 = A_0 \cap B_r(a_1),$$
$$A_j = (A_0 \cap B_r(a_j)) \setminus \bigcup_{i \in \mathbf{N}_{1,j-1}} B_r(a_i)$$
$$(j \in \mathbf{N}_{1,n} \setminus \{1\})$$

とおくと,

$$A_j \subset B_r(a_j)\ (j \in \mathbf{N}_{1,n}),\quad A_0 = \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,n}} A_j,$$
$$A = B_r(a) \sqcup A_0 = B_r(a) \sqcup \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,n}} A_j$$

が成り立つ.

(b) $|b_i - b_j| > 2r$ $(i \neq j \in \mathbf{N}_{1,n})$

をみたす $\{b_j\}_{j \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathbf{R}^3$ をとると, 例 4.1 (i), 系 9.1 (ii) によって

$$B_r(a) \equiv B_r(0) \overset{(*)}{\equiv} \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,n}} B_r(b_j)$$

が成り立つ. また, (a) 及び例 4.1 (i) によって

$$\tau[a_j - b_j](A_j) \subset \tau[a_j - b_j](B_r(a_j)) = B_r(b_j)$$
$$(j \in \mathbf{N}_{1,n})$$

であるから,

$$B_r(a) \subset B_r(a) \sqcup \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,n}} \tau[a_j - b_j](A_j)$$
$$\subset B_r(a) \sqcup \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,n}} B_r(b_j)$$

が得られ, 定理 5.1, 注意 4.1 (ii) 及び (a) によって,

$$B_r(a) \overset{(*)}{\equiv} B_r(a) \sqcup \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,n}} \tau[a_j - b_j](A_j)$$
$$\overset{(*)}{\equiv} B_r(a) \sqcup \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,n}} A_j = A$$

が成り立つ. □

これより, 定理 1.1 (Banach-Tarski の定理) を証明することができる.

定理 1.1 の証明. (i) $a, b \in \mathbf{R}^3$ をそれぞれ A, B の内点とすると, $r_a, r_b \in (0, \infty)$ が存在して,

$$B_{r_a}(a) \subset A,\ B_{r_b}(b) \subset B$$

が成り立つ. このとき, $r = \min\{r_a, r_b\} \in (0, \infty)$ とおくと,

$$B_r(a) \subset B_{r_a}(a) \subset A,\ B_r(b) \subset B_{r_b}(b) \subset B$$

であるから, 命題 10.1 によって

$$A \overset{(*)}{\equiv} B_r(a),\ B \overset{(*)}{\equiv} B_r(b)$$

が得られ, 例 4.1 (i) を用いると, $A \overset{(*)}{\equiv} B$ が成り立つ.

(ii) $A \neq \phi$, $B \neq \phi$ より, $a \in A$, $b \in B$ をとると, a, b はそれぞれ A, B の内点であるから, (i) によって $A \overset{(*)}{\equiv} B$ が成り立つ. □

文献.

福田拓生 (2012),
集合への入門 [無限をかいま見る], 培風館.

砂田利一 (2009),
新版 バナッハ-タルスキーのパラドックス,
岩波科学ライブラリー 165, 岩波書店.

（令和 2 年 9 月30日受理）