「1 = 0.999…」に関連した無限和の扱いについての注意

*田　谷　久　雄

Note on properties of infinite series concerning “1 = 0.999 …”

TAYA Hisao

要　旨

10進位取記数法での小数の表示は一意的ではない．たとえば，1については1.000…と0.999…という2つの表示が可能である．そのため，1 = 0.999…となることの説明がしばしば求められる．これは無限和（無限級数）の理解があればできることであるが，講義の中で学生に説明を求めると怪しいものが散見される．そこで，本稿では正しい理解のための無限和に関する注意をいくつか述べる．

Key words：10進位取記数法，無限級数，循環小数，絶対収束，条件収束

1　序

10 進位取記数法での実数の表示では同じ数であるのに異なる表現が存在する．その代表例が 1 の表示である．つまり，

$$1 = 1.000\cdots = 0.999\cdots$$

である．このことを念頭に考えれば，有限小数（有限桁で表現できる小数）はすべて 2 通りの小数表示をもつことがわかる（cf. [ST18]）．たとえば，

$$0.25 = 0.25000\cdots = 0.24999\cdots$$

である．0.25 は有限小数とよばれる小数であるが，$0.24999\cdots$ は循環小数とよばれる小数（ある位以下から数字の配列が無限に繰り返される小数）である．

高校の教科書（cf. [SK1]）では，有限小数と無限小数の説明において，「$\dfrac{21}{4} = 5.25$ のように小数第何位かで終わる小数を有限小数という．これに対して，小数部分が無限に続く小数を無限小数という.」と書かれており，さらに，「無限小数のうち，$\dfrac{2}{3} = 0.666\cdots$ のように，いくつかの数字の配列が繰り返されるものを循環小数といい」とある．有限と無限という言葉の響きからもこれらは互いに共通部分をもたないという印象を与え，上の $0.25 = 0.24999\cdots$ のような関係がいかにも理解しにくい状況にあるのかもしれない．しかしながら，10 進位取記数法の意味を考えれば，循環小数は等比数列の無限和（無限級数）であり，等比が 1 以下であればその無限和は収束し値が決まる．それを実際に計算すれば，$1 = 0.999\cdots$ や $0.25 = 0.24999\cdots$ となることは直ちにわかるが，授業の中で教師を目指す学生にこれに関して質問をすると，怪しい説明がしばしば出てくる．その主な原因は無限級数についての不理解があげられる．そこで，本稿では，$1 = 0.999\cdots$ の説明で現れる無限級数の扱いについて，既知の数学的事実ではあるが．できるだけ誤解のない説明をするために必要な注意を述べる．

2　$1 = 0.999\cdots$ の説明

小数は小学生から利用している数の表現である．最初は 0.12 や 3.141 などの有限小数を扱う

＊　宮城教育大学　数学教育講座

が，分数を小数で表すことを学ぶ段階で，

$$\frac{2}{3} = 0.666\cdots$$

が登場し，どこまでも数字が並ぶ小数が登場する．また，円周率が登場する場面でも，発展的なトピックスとして円周率はどこまでも続いて終わらない小数表示となることが簡単に紹介されている（cf. [TSe5]）．小学校の教科書では分数を比較する際に，小数表示が有効であるということで無限小数が現れるが，この時点では分数が無限小数になっているという表現上の面白さ（不思議さ）まででとどめているようである．

次に小数がクローズアップされるのは，中学校で平方根を学ぶときである．ここで分数で表すことのできない数として無理数が登場し，

$$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41421356$$

など循環しない無限小数が現れる．たとえば，$\sqrt{2}$ は分数で表せないことや，有理数の小数表示は循環小数または有限小数になることが発展的なトピックスとして紹介され，

$$\frac{1}{3} = 0.\dot{3}, \quad \frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4}$$

という循環小数の表現も登場する．しかし，これは割り算をしたら得られる表示という意味で小学校での内容と同じであるが，少し拡大解釈をして，

$$0.\dot{2}\dot{5} = 0.\dot{0}\dot{1} \times 25 = \frac{1}{99} \times 25 = \frac{25}{99}$$

という途中式の理解が曖昧な等式も登場する（cf. [TSm3]）．ここで曖昧とは，$0.\dot{2}\dot{5} = 0.\dot{0}\dot{1} \times 25$ という等式である．10 進位取記数法の意味を考えれば，

$$0.\dot{2}\dot{5} = 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{10^2} + 2 \cdot \frac{1}{10^3} + 5 \cdot \frac{1}{10^4} + \cdots$$

であるので，曖昧と指摘した等式は

$$b(a_1 + a_2 + \cdots) = ba_1 + ba_2 + \cdots$$

という計算をしていることになる．つまり，無限和で分配法則を使っていることになる．

こういった実数の小数表示を，ある程度まとめて学習するのが高等学校の数学 I である．とは言っても，すでに序章で述べたこととも関連するが，

$$\text{実数}\begin{cases} \text{有理数}\begin{cases} \text{整数} \\ \text{有限小数} \\ \text{循環小数} \end{cases} \\ \text{無理数（循環しない無限小数）} \end{cases}$$

という分け方が見られ，0.25 と $0.24999\cdots$ とでは違う分類の小数という印象になっている（cf. [SK1]）．

しかし一方で，数学 I では上記の分類に従って，循環小数は有理数になることから，循環小数を有理数に直す計算が紹介されている．それを振返ってみると，次の通りである．

例 2.1 循環小数を $x = 3.\dot{2}\dot{7}$ とする．27 が小数表示に繰り返されるので，$100x$ と x の差を考えて，

$$\begin{array}{rrcl} & 100x & = & 327\ .\ 2727\cdots \\ -) & x & = & 3\ .\ 2727\cdots \\ \hline & 99x & = & 324 \end{array}$$

と計算すると，$99x = 324$ より

$$x = \frac{324}{99} = \frac{36}{11}$$

となる．

これは，確認した他の教科書でも同じ説明になっており，循環小数を x とおいて，循環部分が重なるように x を何倍かして，筆算式を提示して差をとり，x を求めている．たとえば，x を 100 倍するというのは，広い意味では無限和に対する分配法則であるが，これについては 10 進位取記数法で位が上がることに対応していると考えれば説明はつく．一方，差をとる部分はうまく説明しないといけない．とくに学生の説明で多いのが，

$$\begin{array}{rrcl} & 100x & = & 327\ .\ \cancel{2}\cancel{7}\cancel{2}\cancel{7}\cdots \\ -) & x & = & 3\ .\ \cancel{2}\cancel{7}\cancel{2}\cancel{7}\cdots \\ \hline & 99x & = & 324 \end{array}$$

という位ごとに消去するというやり方である．筆算は通常の横書きの計算をスムーズに実行するための方法である．たとえば，

$$\begin{array}{rr} & 2727 \\ -) & 327 \\ \hline & 2400 \end{array}$$

という筆算は，

$$2727 - 327$$

という引き算の計算のための筆算であり，引き算の意味だけを考えれば，自然数を 2727 から 327 だけ小さい方にさかのぼった数は何かという計算である．これが筆算として

$$\begin{array}{rr} & 27\cancel{2}\cancel{7} \\ -) & 3\cancel{2}\cancel{7} \\ \hline & 2400 \end{array}$$

のように計算できる理由は，10 進位取記数法により

$$\begin{aligned} & 2727 - 327 \\ & = (2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7) \\ & \quad -(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7) \\ & = 2 \cdot 10^3 + (7 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10^3) \\ & \quad +(2 \cdot 10 - 2 \cdot 10) + (7 - 7) \\ & = 2 \cdot 10^3 + (7 - 3) \cdot 10^2 \\ & = 2400 \end{aligned}$$

となるからであり，これには交換法則や結合法則，分配法則が使われていることがわかる．これを循環小数の筆算で考えてみれば，

$$\begin{aligned} & 327.2727\cdots - 3.2727\cdots \\ & = \Big(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7 \\ & \quad +2 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{10^2} + \\ & \quad +2 \cdot \frac{1}{10^3} + 7 \cdot \frac{1}{10^4} + \cdots\Big) \\ & \quad -\Big(3 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{10^2} + \\ & \quad +2 \cdot \frac{1}{10^3} + 7 \cdot \frac{1}{10^4} + \cdots\Big) \\ & = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 \\ & \quad +(7 - 3) + \Big(2 \cdot \frac{1}{10} - 2 \cdot \frac{1}{10}\Big) \\ & \quad +\Big(7 \cdot \frac{1}{10^2} - 7 \cdot \frac{1}{10^2}\Big) \\ & \quad +\Big(2 \cdot \frac{1}{10^3} - 2 \cdot \frac{1}{10^3}\Big) \\ & \quad +\Big(7 \cdot \frac{1}{10^4} - 7 \cdot \frac{1}{10^4}\Big) + \cdots \\ & = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4 = 324 \end{aligned}$$

としていることになる．つまり，たとえば，筆算計算での小数第一位の消去にあたる

$$2 \cdot \frac{1}{10} - 2 \cdot \frac{1}{10}$$

という計算は，$3.2727\cdots$ の小数第一位の $2 \cdot \frac{1}{10}$ について無限回の項の交換を行って，$327.2727\cdots$ の小数第一位の $2 \cdot \frac{1}{10}$ と引き算を行っていることになる．これは正しい計算法則だろうか？

同様に，表題の $1 = 0.999\cdots$ という関係の説明を行えば，$x = 0.\dot{9}$ とおき，$10x$ と x の差を考えて，

$$\begin{array}{rrcl} & 10x & = & 9\,.\,999\cdots \\ -) & x & = & 0\,.\,999\cdots \\ \hline & 9x & = & 9 \end{array}$$

より，$9x = 9$ となるので，$x = 1$，つまり，$1 = 0.999\cdots$ を確認したことになる．しかし，位ごとに消去するという説明では無限回の項の交換という同じ問題が生じる．

$1 = 0.999\cdots$ については，

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots$$

を利用する説明もしばしばなされる．それはこの式の両辺を 3 倍するというもので，

$$\begin{aligned} 1 &= 3 \times \frac{1}{3} \\ &= 3 \times 0.333\cdots \\ &= 0.999\cdots \end{aligned}$$

というものである．しかし，これも前出の $0.\dot{2}\dot{5} = 0.\dot{0}\dot{1} \times 25$ と同様に無限和の分配法則を用いていることになる．

この流れでとりあえず安心できる説明としては，

$$9.999\cdots = 9 + 0.999\cdots$$

であるから，$0.999\cdots$ を確定した一つの実数として扱い，

$$\begin{array}{rrcl} & 10x & = & 9\,.\,\cancel{999\cdots} \\ -) & x & = & 0\,.\,\cancel{999\cdots} \\ \hline & 9x & = & 9 \end{array}$$

とすることである．つまり，$10x = 9 + 0.999\cdots$ から（に）$x = 0.999\cdots$ を引き（を代入し），$9x = 9$ とするのである．これによって無限和を扱う必要はなくなる（$0.999\cdots$ が確定した実数になることは次節で述べる）．

3　無限級数の計算法則

前節で述べた通り循環小数の計算は，10 進位取記数法の意味に戻れば，無限に続く和に関する計算に帰着できる．これらの計算の正当性を確かめるためには無限に続く和に関する交換法則や分配法則の成立が必要になるのであった．

表題では無限に続く和という意味で無限和と表現したが，こういった無限和は高校数学では無限級数として数学 III で登場する．簡単に振り返えると，数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

において，各項を添え字の小さい順に $+$ 記号でつないで得られる

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

という式が無限級数である．とくに，循環小数の 10 進位取記数法による無限和の式

$$0.\dot{9} = 9 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{10^2} + 9 \cdot \frac{1}{10^3} + \cdots$$

は無限等比級数ということになる．

さて，(1) の和であるが，無限級数の値の定義は次の通りである．まず，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

とおいて，これを第 n 項までの部分和（第 n 部分和）とよぶ．この部分和 S_n のなす数列 $\{S_n\}$ が n を大きくしたときに収束すれば，その極限値 S が無限級数の値である．つまり，

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

であり，これがいわゆる無限和の値の定義である．有限の値が定まるとき無限級数は収束するといい，そうでないとき発散するという．したがって，発散するときには無限和が有限の値として定まらないことになる．

実は，これを使えば，$1 = 0.999\cdots$ が成り立つことは直ちに示すことができる（この流れは数学 III の中でもトピックスとして書かれている（cf. [SK3]））．

証明（$1 = 0.\dot{9}$ となること）　まず $0.\dot{9}$ を 10 進位取記数法で表すと，

$$0.\dot{9} = 9 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{10^2} + 9 \cdot \frac{1}{10^3} + \cdots$$

であり，これは初項 $\frac{9}{10}$，公比 $\frac{1}{10}$ の無限等比数列である．その第 n 項までの部分和 S_n は，等比数列の和の公式より

$$S_n = \frac{9}{10}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

となるので，

$$\begin{aligned} 0.\dot{9} &= 9 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{10^2} + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

が得られる．ここで，

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$$

であることから（このことも厳密に示せば，δ-ε 論法においてアルキメデスの原理を利用することになるが，これについては注意 3.1 参照のこと），

$$0.\dot{9} = \lim_{n\to\infty} \left\{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right\} = 1$$

が従い，めでたく $1 = 0.999\cdots$ が示せるのである（これによって，確定した実数であることもわかる）．　□

注意 3.1　ここでは，基本的には実数の連続性に依ることになる，

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$$

の証明の一例を以下に与える．

数列 $\left\{\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}$ を考える．これは，

$$0 < \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

より，下に有界な単調減少数列である．よって，集合

$$\left\{\left(\frac{1}{10}\right)^n \,\middle|\, n \text{ は自然数}\right\}$$

は下に有界であるので，実数の連続性より下限 $\alpha \geq 0$ が存在する．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\alpha + \varepsilon$ は下限ではないので，

$$\alpha + \varepsilon > \left(\frac{1}{10}\right)^N$$

となる自然数 N が存在する．すると，数列の単調減少性より，任意の $n \geq N$ について

$$\alpha + \varepsilon > \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

が成り立つ．一方，α は同じ n について

$$\alpha \leq \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

である．よって，任意の $n \geq N$ について

$$\left| \left(\frac{1}{10}\right)^n - \alpha \right| < \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，数列 $\left\{\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}$ は n を大きくすると α に収束する．つまり，

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \alpha$$

である．

あとは，$\alpha = 0$ となることを示せばよい．そこで，仮に $\alpha \neq 0$ とする．このとき，任意の自然数 n について

$$0 < \alpha \leq \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

であるので，$n < 10^n$ に注意すれば，

$$n < 10^n \leq \frac{1}{\alpha}$$

が従う．しかし，これは自然数全体の集合が上に有界となることを意味し，アルキメデスの原理に反する．よって，$\alpha = 0$ である．以上より，

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$$

が示せた（$0 \leq a < 1$ について $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ となることも同様に示せる）．

同じような無限に続く和として．

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$$

はよく引き合いに出されるものである．この和は，どの和を先に計算するかによって，

$$\begin{aligned} &1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots \\ &\quad = (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots \\ &\quad = 0 + 0 + \cdots = 0 \end{aligned}$$

とも

$$\begin{aligned} &1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots \\ &\quad = 1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \cdots \\ &\quad = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

とも計算できる．しかし，得られる結果が違うので，これは無限和では一般に結合法則が成り立たないことを示唆しており，そのため無限級数では和の順序を明確に左側の和から計算するように定義しているわけである．無限級数の定義に従って，上の和を計算すれば，

$$\begin{aligned} &S_1 = 1, \\ &S_2 = 1 + (-1) = 0, \\ &S_3 = 1 + (-1) + 1 = 1, \\ &S_4 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0, \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

となり，S_n の値は 0 と 1 を交互に繰り返し，有限の値に収束しないことがわかる．つまり，無限級数として和の値は定まらない．

この和は値が定まらないので，次に述べる計算は意味のないものであるが，たとえば交換法則が成り立つと仮定し，2 項目の -1 と 3 項目の 1，4 項目の -1 と 5 項目の 1，$\cdots$, と次々に交換していけば，

$$\begin{aligned} &1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots \\ &\quad = 1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots \end{aligned}$$

を得る．同様な交換をさらに行えば，

$$\begin{aligned} &1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots \\ &\quad = 1 + 1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots \\ &\quad = 2 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots \end{aligned}$$

となる．そして，これを次々に実行し続ければ，任意の自然数 n について，

$$\begin{aligned} &1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots \\ &\quad = n + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots \end{aligned}$$

が得られる．この式で両辺から最初に考えていた和 $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots$ を引けば，

$$0 = n$$

となり，明らかに何かがおかしい．また，結合法則も成り立つと仮定し計算すれば，

$$\begin{aligned}1&+(-1)+1+(-1)+1+\cdots\\ &=n+(1+(-1))+(1+(-1))+\cdots\\ &=n+0+0\cdots=n\end{aligned}$$

となり，この無限級数はどんな自然数にも値をとり得ることになる．明らかにおかしなことであるが，そもそも収束しない無限級数であるので，このような変なことが起っても心配する必要はない．

では，収束する無限級数ではどうであろうか？これも有名な例であるが，次の無限級数は収束する（和の値が $\log 2$ になることは第 5 節で示す）．

$$\begin{aligned}1&+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{5}+\cdots\\ &=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\log 2\end{aligned}$$

この無限級数は，n が奇数ならば $+$，n が偶数ならば $-$ を付けて，$+, -, +, -, \cdots$ の順に n が小さい方から順番に $\pm\frac{1}{n}$ を加えたものである．これを，$+, +, -, +, +, -, \cdots$ の順に n が小さい方から順番に加えれば，

$$\begin{aligned}1&+\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\cdots\\ &=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots\end{aligned}$$

を得るが，これについては，

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\log 2$$

となることがわかる（これも第 5 節で述べる）．このことは，収束する無限級数について，無闇に和を交換してはいけないことを示唆している．つまり，一般に無限和において交換法則は成り立たないのである．したがって，$1=0.999\cdots$ において，各位ごとに引くという

$$\begin{array}{rl} & 9\,.\,\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cdots\\ -) & 0\,.\,\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cdots\\ \hline & 9 \end{array}$$

のような筆算は何の理由もなくできることではないということになる．

なお，収束する数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ について，その極限値を

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha,\quad \lim_{n\to\infty} b_n=\beta$$

とするとき，任意の実数 r, s に対して

$$\lim_{n\to\infty}(ra_n\pm sb_n)=r\alpha\pm s\beta$$

が成り立つことは数列の極限を計算する上での基本性質である（これらの性質も厳密に証明しようとすれば，$\delta-\varepsilon$ 論法を用いることになるが，本稿では注意 3.1 の中ですでに一例を示しているので，これらの厳密な証明については [SK3] や [TT61] 等に委ねる）．したがって，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ についても，それらが収束してその和が α, β であるとすれば，任意の実数 r, s に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ra_n\pm sb_n)=r\alpha\pm s\beta$$

が成り立つ．よって，とくに収束していれば，分配法則

$$\sum_{n=1}^{\infty} ra_n=r\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2}$$

が成り立ち，任意の項の交換ではないが，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{3}$$

も成り立つ．これを用いれば，

$$x=0.999\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}$$

の値はわからないが確定した実数であるという仮定のもとで，再び $1=x=0.999\cdots$ が示せる．

なせならば，(2) により

$$10x=\sum_{n=1}^{\infty}10\cdot\frac{9}{10^n}=9.999\cdots$$

となり（これも確定した実数となり），$10x$ と x の差をとれば，(3) より

$$9x=10x-x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10^{n-1}}-\frac{9}{10^n}\right)$$

を得る．よって，$9x$ の第 n 部分和 S_n は

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{9}{10^{k-1}}-\frac{9}{10^k}\right)\\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{9}{10^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k}=9\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\end{aligned}$$

となるので（最後の等式は，有限和であるので項の順序を入れ替えて引き算を行っているが，これは有限小数の引き算を筆算で表したときに，同じ位の数を引くという計算に対応している），

$$9x = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 9\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 9$$

となり，$x = 1$，つまり，$1 = 0.999\cdots$ が得られた．

4　絶対収束と条件収束

前節では，収束する無限級数においても交換法則が成り立たない例があることを述べた．それでは，どのような場合に交換法則が成り立つのだろうか．そのために重要な概念が絶対収束と条件収束である．以下，無限級数は単に級数といい，級数に現れる各項は実数であるとする．

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について，各項の絶対値の級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**絶対収束**するという．級数が絶対収束すればその級数は収束する．実際に，任意の自然数 $m > n$ について

$$|a_n + \cdots + a_m| < |a_n| + \cdots + |a_m|$$

であるので，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するということは（$T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|$ とおくとき数列 $\{T_n\}$ がコーシー列であることになるので），n を限りなく大きくするとき，右辺は限りなく小さくなるので，左辺も同様に小さくなり（$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき数列 $\{S_n\}$ もコーシー列となり），級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束することになる．一方，無限級数が収束し，しかし絶対収束しないときには，それを**条件収束**するという．

注意 4.1 上の括弧内の説明でコーシー列という言葉を用いた．これについて補足しておく．

数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 N が決まって，任意の $m, n \geq N$ について

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

となることである．また，この性質は数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件となっている．

各項 a_n が $a_n \geq 0$ をみたす級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を**正項級数**という．正項級数は非負の値を加えていくので，収束するか ∞ に発散するかのいずれかである．そこで，∞ に発散することも含めて級数の和とよぶことにする．

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を正項級数とする．このとき，第 n 項までの部分和 S_n と，番号を気にせず n 個の項をとってできる部分和 T_n を比較する．まず，T_n に番号を気にせず項を加えていけば，十分大きな m について S_n は T_m の一部となる．また，任意の部分和 T_m の項は，n を十分大きくとれば S_n に含まれる．これらのことより，項の番号に拘らず加えた和は有界であり，S_n と同じ値に収束する．つまり，正項級数では項の順序を入れ替えた級数も元の級数と同じ和になる．よって，正項級数について次が成り立つ．

定理 4.2 収束する正項級数は項の順序をどのように入れ替えても収束し，その級数の値は変わらない（∞ も和の値として許せば，正項級数は項の順序に無関係に一定の和になる）．

次に，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において，正と負の項が混在する場合を考える．$a_i = 0$ となる項は和の値に影響しないから，はじめからそのような項はないものとし，正の項を $p_1, p_2, \cdots$ とおき，負の項を $-q_1, -q_2, \cdots$ とおく（よって，q_i は正である）．p_i も q_i も正であるから，それぞれについて和をとると単調に増加する．よって，

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n, \quad q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

とおけば，

(1) p も q も有限の値

(2) p と q の一方が有限の値で他方が $+\infty$.

(3) p も q も $+\infty$.

のいずれかである．

(1) の場合，$s = p - q$ は一定の有限値に定まる．また，定理 4.2 より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = p + q$ であ

るので，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束である．また，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の第 n 部分和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{l} p_k - \sum_{h=1}^{m} q_h$$

と表せて，$n \to \infty$ のとき，$l \to \infty$，$m \to \infty$ であるので，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} p_k - \sum_{h=1}^{\infty} q_h = p - q = s$$

となる．さらに，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において項の順序をどのように変えても（第 n 部分和 S_n における l や m の値が変わっても），p と q の値は不変であるので，その和の値は変わらない．

(2) の場合，$s = p - q$ は $+\infty$ か $-\infty$ となり，これは $\lim_{n\to\infty} S_n$ に等しい．つまり，この場合，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束せず，$+\infty$ か $-\infty$ に発散する．この関係は項の順序をどのように変えても不変であり，その和は発散する．

(3) の場合，$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = p + q$ であるので，その和は ∞ に発散し，絶対収束とはならない．

以上より，絶対収束する級数について次が成り立つことがわかる．

定理 4.3 絶対収束する級数は項の順序をどのように入れ替えても絶対収束し，その級数の値も項の順序をどのように入れ替えても変わらない．

一方，条件収束する級数については，適当に項の順序を入れ替えることによって，その和の値を与えられた任意の実数値にすることができる．

以下，そのことを説明していく．$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を条件収束する級数とし，$a_i = 0$ となる項は和の値に影響しないから先ほどと同様にそのような項はないものとする．条件収束するので，先ほどの (1) や (2) の場合には該当しない．よって，条件収束する級数が満たす条件は (3) の場合となる．このとき，項の順序を入れ替えることによって，任意の実数 r に収束するようにできることを，高木貞治の解析概論 [TT61] に従って説明する．

仮に r を非負とする．p も q も ∞ であるので，まず正の項 p_i を順に加えていけばいつかは r を超える．はじめて和が r を超える正の項の番号を α とする．次に，この正の項の和に続けて，負の項 $-q_i$ を順に加えていけばやがて r より小さくなる．はじめて和が r より小さくなる負の項の番号を β とする．次に，再び正の項を $p_{\alpha+1}$ から順に加えてはじめて r を超える正の項の番号を γ とし，さらに，再び負の項を $-q_{\beta+1}$ から順に加えてはじめて r より小さくなる負の項の番号を δ とする．$p = q = \infty$ であるから，この操作はいくらでも続けることができて，

$$\begin{aligned} &p_1 + \cdots + p_\alpha - q_1 - \cdots - q_\beta + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{\alpha} p_k - \sum_{k=1}^{\beta} q_k \\ &\quad + \sum_{k=\alpha+1}^{\gamma} p_k - \sum_{k=\beta+1}^{\delta} q_k + \cdots \end{aligned}$$

という級数が得られる．この級数は各回ごとに正の項と負の項が少なくとも一項以上使われており，番号の小さい項から順番に使われているので，もとの級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の項の順序を入れ替えた級数となっている．実はこの級数が r に収束する級数となる．

実際に，2 つの負の項 $-q_\lambda$ と $-q_{\lambda+1}$ の間に正の項 $p_\mu + p_{\mu+1} + \cdots + p_\nu$ が挟まれているとする．負の項 $-q_\lambda$ までの部分和 $S_{n(q_\lambda)}$ は r より小さいが，$-q_\lambda$ を加えてはじめて r より小さくなるので，

$$|S_{n(q_\lambda)} - r| < q_\lambda$$

となる．次に部分和 $S_{n(q_\lambda)}$ に正の項 $p_\mu, p_{\mu+1}, \cdots$ を加えるが，$p_{\nu-1}$ までは r を超えず，p_ν を加えてはじめて r を超える．よって，正の項 p_μ から $p_{\nu-1}$ を加えるまでのどの部分和 $S_{n(p_*)}$ も r より小さく，r との差は q_λ を超えないことより

$$|S_{n(p_*)} - r| < q_\lambda$$

であり，また，正の項 p_ν までの部分和 $S_{n(p_\nu)}$ ではじめて r を超えるので，

$$|S_{n(p_\nu)} - r| < p_\nu$$

となる．つまり，$-q_\lambda$ の項から p_ν までの項のどの部分和 S についても

$$|S - r| < q_\lambda \text{ または } |S - r| < p_\nu$$

が成り立つ．2 つの正の項に負の項が挟まれた場合についても同様にそこまでのどの部分和 S も r との差は符号が変わるところにある項 p_ν または q_λ を超えないことがわかる．いま，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は条件収束であったので，級数そのものは収束するから（部分和 S_n のなす数列がコーシー列であるから），

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

となっている．つまり，$n \to \infty$ とするとき p_ν も q_λ も限りなく小さくなるので，a_n の部分和 S_n について

$$\lim_{n\to\infty} |S_n - r| = 0$$

が従う．よって，このように並び替えた級数は r に収束する．

r が負の場合についても負の項からはじめて同様に項を並び替えた級数を作れば r に収束させることができる．さらに，はじめに正の項をその和が 1 を超えるまで加え，超えたら負の項を一つだけ加える．つぎに，再び正の項を今度はその和が 2 を超えるまで加え，超えたら負の項をまた一つだけ加えていく．$p = q = \infty$ であるから，これを繰り返して自然数 k を超えるまで正の項を加えて，そのあとに一つだけ負の項を加えるという操作ができ，これによって得られる級数の和は ∞ に発散する．これと同じ考え方で，負の整数 $-k$ を超えるまで負の項を加え，そのあとに一つだけ正の項を加えるという操作を行えば，$-\infty$ に発散する無限級数も得られる．

以上のことより次が示せた．

定理 4.4 (ディリクレの定理) 条件収束する級数は適当に項の順序を入れ替えることによって，その級数の値を任意の実数に等しくしたり，$+\infty$ や $-\infty$ にすることができる．

この節で述べたことより，絶対収束する級数は有限和と同じように項を交換することができるが，条件収束する級数は項の順序を乱してはいけないというがわかる．収束する級数は絶対収束するか条件収束するかのいずれかであるので，絶対収束に関する定理 4.3 と条件収束に関する定理 4.4 から，項の順序の入れ替えに関して次の定理が得られる．

定理 4.5 収束する級数について，級数の項の順序をどのように入れ替えてもその級数の値が変わらないための必要十分条件は，その級数が絶対収束することである．

5　具体的な例

この節では具体的な例を与える．まず，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

となるが，有限の値に収束しない級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の代表例である調和級数を紹介する．

例 5.1 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

を調和級数とよぶ．この級数では $n \to \infty$ のとき

$$\frac{1}{n} \to 0$$

となり（これも $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$ と同様に実数の連続性の一部であるアルキメデスの原理からの帰結である），加えていく項は限りなく小さくなっていくが，第 n 部分和を S_n とすると，

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

となるので，部分列のなす数列 $\{S_n\}$ はコーシー列ではない（$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が無限個の $\dfrac{1}{2}$ の和で下から評価できると解釈しても良い）．よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は ∞ に発散する．つまり，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

となる．

次の例を与える前にオイラーの定数 γ を紹介する．上の例で述べた調和級数の第 n 部分和と $\log n$ との差を

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

とおき，数列 $\{\gamma_n\}$ を定める．調和級数は関数 $y = \dfrac{1}{x}$ の自然数 x における値の和であり，

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{n} \quad (n \geq 1)$$

が成り立つ．よって，

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\log(n+1)$$

となるので，

$$\gamma_n>\log\frac{n+1}{n}>0$$

が成り立つ．また，

$$\frac{1}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}=\log\frac{n+1}{n}\quad(n\geq 1)$$

であるので，

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n=\frac{1}{n+1}-\log\frac{n+1}{n}<0$$

が成り立つ．よって，数列 $\{\gamma_n\}$ は下に有界な単調減少数列である．したがって，極限値が存在する．そこで，

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\gamma_n$$

とおき，この γ をオイラーの定数とよぶ（$\gamma=0.5772156\cdots$ となることが知られている）．オイラーの定数 γ を利用し，よく引き合いに出される条件収束する級数の値を求めてみる．

例 5.2 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

は，各項の絶対値を項とする級数が調和級数である．よって，絶対収束はしない．ここで，オイラーの定数 γ を極限値にもつ数列 $\{\gamma_n\}$ を利用すれば，この級数の第 n 部分和は，$n=2m$ であるとき，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^{k+1}}{k}&=\sum_{k=1:\text{奇数}}^{2m}\frac{1}{k}-\sum_{k=1:\text{偶数}}^{2m}\frac{1}{k}\\&=\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\\&=(\gamma_{2m}+\log 2m)-(\gamma_m+\log m)\\&=\gamma_{2m}-\gamma_m+\log 2\\&\to\gamma-\gamma+\log 2=\log 2\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

となり，$n=2m+1$ のときにも，同様にして，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}&=\sum_{k=1:\text{奇数}}^{2m+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1:\text{偶数}}^{2m}\frac{1}{k}\\&=\gamma_{2m+1}-\gamma_m+\log\left(2+\frac{1}{m}\right)\\&\to\gamma-\gamma+\log 2=\log 2\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

となる（$n=2m+1$ の場合について，$n=2m$ までの和に $\frac{1}{2n+1}$ を加えるだけであり，$n\to\infty$ とするとき

$$\frac{1}{2n+1}\to 0$$

であることから，$n=2m+1$ 項までの和は $n=2m$ 項までの和と同じ値に収束する，と言ってもよい）．よって，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots=\log 2$$

が得られる．以上より，これは条件収束する級数である．

例 5.3 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

は，上の例でみたように条件収束する．よって，ディリクレの定理によれば，各項の順序を入れ替えることにより違う値に収束したり，∞ に発散することになる．ここでは，再び高木貞治の解析概論 [TT61] に従って，項の順序を入れ替えて得られる級数を考えてみる．まずはじめに，奇数の逆数である $+$ の項を項の番号が小さいものから順に p 項加え，つぎに，この和に偶数の逆数である $-$ の項を項の番号が小さいものから順に q 項加える．これを交互に繰り返して得られる級数を $L(p,q)$ と書くことにすれば，

$$\begin{aligned}L(p,q)=1&+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2p-1}\\&-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\cdots-\frac{1}{2q}\\&+\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+3}+\cdots+\frac{1}{4p-1}\\&-\frac{1}{2q+2}-\frac{1}{2q+4}-\cdots-\frac{1}{4q}+\cdots\end{aligned}$$

となる級数が得られる．そこで，

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\\b_n&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

とおけば，第 $(p+q)n$ 項までの部分和 $S_{(p+q)n}$ は，有限和であるから項の順序を入れ替えることができて，

$$S_{(p+q)n}=a_{pn}-b_{qn}$$

となる．ここで，オイラーの定数 γ を極限値にもつ数列 $\{\gamma_n\}$ を利用すれば，

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= \log 2n + \gamma_{2n} \\ 2b_n &= \log n + \gamma_n \end{aligned}$$

と書き表せるので，

$$\begin{aligned} a_n &= \log 2 + \frac{1}{2}\log n + \gamma_{2n} - \frac{1}{2}\gamma_n \\ b_n &= \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\gamma_n \end{aligned}$$

が得られる．よって，

$$\begin{aligned} S_{(p+q)n} &= a_{pn} - b_{qn} \\ &= \left(\log 2 + \frac{1}{2}\log pn + \gamma_{2pn} - \frac{1}{2}\gamma_{pn}\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}\log qn + \frac{1}{2}\gamma_{qn}\right) \\ &= \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q} \\ &\qquad\quad + \gamma_{2pn} - \frac{1}{2}\gamma_{pn} - \frac{1}{2}\gamma_{qn} \\ &\to \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q} + \gamma - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\gamma \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n \to \infty) \\ &= \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q} \end{aligned}$$

が従う．第 $(p+q)n$ 項から第 $(p+q)(n+1)$ 項までの間の項の和については，どの項も

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(pn+i)-1} &< \frac{1}{2n} \quad (i = 1, 2, \ldots, p) \\ -\frac{1}{2(qn+j)} &> -\frac{1}{2n} \quad (j = 1, 2, \ldots, q) \end{aligned}$$

であるので，その和の絶対値の値は $\dfrac{p+q}{2n}$ よりも小さい．よって，固定された p と q に対して他の部分和 $S_{(p+q)n+k}$（$k = 1, 2, \cdots, p+q-1$）も $S_{(p+q)n}$ と同じ値に収束する．したがって，

$$L(p, q) = \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q}$$

が得られた．

たとえば，$p = 1,\ q = 1$ とおけば，

$$\begin{aligned} L(1,1) &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \\ &= \log 2 + \frac{1}{2}\log 1 = \log 2 \end{aligned}$$

が得られ，$p = 2,\ q = 1$ とおけば，

$$\begin{aligned} L(2,1) &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots \\ &= \log 2 + \frac{1}{2}\log 2 = \frac{3}{2}\log 2 \end{aligned}$$

が得られ，$p = 1,\ q = 2$ とおけば，

$$\begin{aligned} L(1,2) &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots \\ &= \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log 2 \end{aligned}$$

が得られる．また，a を固定した 0 以上の整数とし，$p = 2^a$，$q = 1$ とおけば，

$$L(2^a, 1) = \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{2^a}{1} = \frac{a+2}{2}\log 2$$

が得られる．

最後に，この条件収束する級数の項を入れ替えて ∞ に発散する例を与える．はじめの第 4 項はそのままとし，第 5 項目以降は 2^{n-1} より大きく 2^n より小さい奇数の逆数を加えていき，そのあとに偶数 $2n$ の逆数を一つだけ引くというルールで項を入れ替えて得られる級数を $L^*(\{2^{n-2}\}_n, 1)$ と書けば，

$$\begin{aligned} L^*(\{2^{n-2}\}_n, 1) &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &+ \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} \\ &+ \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} \\ &+ \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots + \frac{1}{31} - \frac{1}{10} + \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2n} + \cdots \end{aligned}$$

となる級数が得られる．このとき，第 4 項までの和は

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

であり，それ以降の項は，$n \geq 3$ について，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2n} \\ &> \underbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-2}\text{個}} - \frac{1}{2n} = \frac{2^{n-2}}{2^n} - \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

となる（前節で述べた ∞ に発散させる方法では，プラスの項を加える際に 1,2,3,... と 1 ずつ大きくなる自然数列を超えるように項の順序を調整したが，ここでは偶数の逆数を一つ引いてから

次に再び一つ引くまでに $\frac{1}{12}$ を超えて大きくなるように項の順序を調整をしたことになる）．したがって，偶数 $2n$ の逆数を引いた項までの部分和を $S_{n(2n)}$ とすれば，$2n > 4$ のとき，

$$\begin{aligned} S_{n(2n)} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{7}{12} + (n-2)\frac{1}{12} = \frac{n+5}{12} \end{aligned}$$

となる．よって，$n \to \infty$ とするとき，

$$\frac{n+5}{12} \to \infty$$

であるので，この部分和 $S_{n(2n)}$ は ∞ に発散する．偶数 $2n$ の逆数を引いた項から次の偶数 $2(n+1)$ の逆数を引いた項までの間のある項までの部分和は，$S_{n(2n)}$ に有限の値を加えただけであるので，やはり ∞ に発散する．よって，級数 $L^*(\{2^{n-2}\}_n, 1)$ は ∞ に発散する．つまり，

$$L^*(\{2^{n-2}\}_n, 1) = \infty$$

となる．

参考文献

[ST18] 佐藤得志，実数の N 進小数展開の具体的表示について，宮城教育大学紀要，第 53 号，2018, pp. 149-57.

[SM80] 杉浦光夫，解析入門 I，1980 年，東京大学出版会.

[TT61] 高木貞治，解析概論，改訂第 3 版，1961 年，岩波書店.

[TSe5] 新編新しい算数 5 上下，東京書籍，H26 年検定済，H29 年発行.

[TSm3] 新編新しい数学 3，東京書籍，H27 年検定済，H28 年発行.

[SK1] 数学 I，数研出版，H23 年検定済，H26 年発行.

[SK3] 数学 III，数研出版，H24 年検定済，H26 年発行.

田谷 久雄 (TAYA Hisao)
宮城教育大学 数学教育講座
980-0845 仙台市青葉区荒巻字青葉 149
E-mail：taya@staff.miyakyo-u.ac.jp