現実世界の問題解決を契機とする数学的探究のための教材開発

*花　園　隼　人

要　旨

実用的な問題であった測量を端緒として発展した幾何学において、「約束事」である公準の一つがもつ「違和感」を契機とした研究が時代や地域を超えて展開された結果として非ユークリッド幾何学が創り出されたように、数学は、現実世界の問題場面を離れた抽象的な数学的探究によって発展してきたことが広く認められている。本稿の目的は、このような現実世界の問題解決を契機とする数学的探究を授業で実現するための教材を開発することである。この目的のために、本稿では江戸川乱歩の『鏡地獄』の特定の場面と、水槽などで見られる光の屈折という現象を対象に、それぞれ数学的モデル化過程を通した分析の後、そのモデル自体を対象とした数学的探究を教材分析として行なった。また、この一連の教材分析の結果を踏まえて教材を構成した。今後の課題は開発した教材を用いた教材活用を実施することによって、教材の実践的な評価及び改善を行うことである。

Key words： 数学教育、教材開発、数学的探究、数学的モデル化過程

1．はじめに

高等学校学習指導要領解説には、「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善の留意点として挙げられた五つの項目の中に、次の①②がある。

① 授業の方法や技術の改善のみを意図するものではなく、生徒に目指す資質・能力を育むために「主体的な学び」、「対話的な学び」、「深い学び」の視点で、授業改善を進めるものであること。
② 各教科等において通常行われている学習活動（言語活動、観察・実験、問題解決的な学習など）の質を向上させることを主眼とするものであること。

（文部科学省，2019, p.4）

これらのうち、①として記載された、「生徒に目指す資質・能力を育むため」という意図や、②として記載された「学習活動（言語活動、観察・実験、問題解決的な学習など）の質を向上させる」と言った主眼を踏まえると、算数・数学ワーキンググループで審議され学習指導要領解説にも記載されている「算数・数学の問題発見・解決の過程」(図１）を通した学びが、算数・数学科における「主体的・対話的で深い学び」の一形態として期待されていると解釈できる。なぜならば、この「算数・数学の問題発見・解決の過程」は、数学的に考える資質・能力の育成する上で展開することが重視される数学的活動として捉えられている学習過程だからである（文部科学省，2019)。

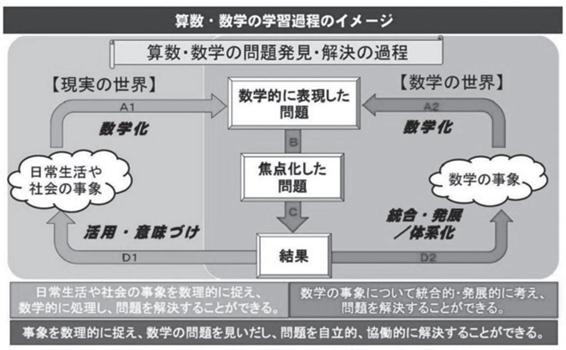

図１　算数・数学の問題発見・解決の過程
（文部科学省，2019, p.26）

＊　宮城教育大学 教科教育学域（数学教育学）

図１の左側のサイクル（A1→B→C→D1）は、「日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程」(文部科学省，2018, p.25）であり、広く数学的モデル化と表現される過程である。この過程や、国際的に広く注目を集めているSTEM（Science, Technology, Engineering and Mathematics）教育といった領域横断的な実践や学習の文脈においては、数学は有効にはたらく道具として注目されている。このような道具としての数学の実用性や有用性は、測量といった現実の問題の解決を端緒として発展してきたとされる数学が有する重要な価値の一つである。

一方で、実用的な問題であった測量を端緒として発展した幾何学において、「約束事」である公準の一つがもつ「違和感」を契機とした研究が時代や地域を超えて展開された結果として非ユークリッド幾何学が創り出されたように、数学は、現実世界の問題場面を離れた抽象的な数学的探究によって発展してきたことも広く認められている。Kline（1974）が数学の歴史を紐解き、「実用的、科学的、美的、哲学的関心の全てが集って数学を形づくった」(Kline, 1974, p.7）と述べるように、数学は本来、数学内外における契機により、複合的に発展してきたものであると解釈できる。

このような長期的な展望で数学を捉えると、数学的モデル化に関する学習やSTEM教育で展開されている豊かな教材においても、道具として用いられる数学的概念や命題、方法などの発展という視点が不十分であるという課題が見えてくる（e.g., 竹内，2018；二宮，2017)。数学内外の契機に基づく学習を展開するためには多くの時間が必要になることが想定できるが、学習指導要領における数学科の目標に記載された「数学的活動を通して」という文言が、「単位授業時間においてこれらの過程の全てを学習することを求めるものではない」(文部科学省，2019, p.26）ものであることを踏まえると、授業をまたがる中・長期的な単元で現実世界の問題解決を契機とする数学的探究を実現することは、学習者にとって数学の特性を踏まえた「主体的・対話的で深い学び」を経験する場になることが期待できる。

以上より、本稿では、現実世界の問題解決を契機とする数学的探究の実現を意図した教材の開発を目的とした考察を行う。

この目的の達成のために、本稿では「帰納的構成」（長谷川，2013, p.29）を主な研究方法として採用する。この方法は、「実際の生活においてこの素材を取り上げれば学習が面白く展開できるのではないかと想定して、その素材にかかわる事実、出来事、現象などを加工して、一定の学習のねらいをもつひとまとまりの教育内容へ構成すること」(長谷川，2013, p.30）というものである。この「機能的構成」以外の方法として、教育内容を実現しうる教材を選択する「演繹的構成」(長谷川，2013, p.29）があるが、「演繹的構成」は教育内容を実現しうる教材が明確である場合に適切な方法である。本稿が開発を目指す「現実世界の問題の解決を契機とする数学的探究」を経験させる目的に適した教材は管見の限り蓄積されていない。したがって「帰納的構成」が適切な研究方法であると言える[1]。

この「帰納的構成」では、素材の選択は探索的に行われるが、本稿では教材開発ができた素材および教材開発のプロセスのみを記述することとする。また、選択した素材が「現実世界の問題の解決を契機とする数学的探究の過程」を実現しうるかどうかを検討する教材分析は、筆者自身が素材に現実世界の問題を見出し、数学的モデル化によって解決し、その過程で用いた数学的モデルを考察対象とした数学的探究を試行した上で、そのプロセス全体で用いられた数学的内容や方法などを振り返って特定するという内省的方法で行う。

なお、本稿では日本の小学校算数科及び中学校数学科で広く実践されているとされる問題解決型授業、すなわち「問題把握」、「自力解決」、「練り上げ」、「まとめ」の順を基本として展開される授業を想定した教材を開発する。これは、上述の「主体的・対話的で深い

1　長谷川（2013）は「帰納的構成」と「演繹的構成」の他に、「発生的構成」として「大事な概念、原理、法則、作品、製品、方法、価値などの発生や生成を調べて、その過程を単純化して、これを追体験するように教材を構成すること」(長谷川，2013, p.30）を挙げている。このような方法によって教材開発を行なった塚原（2002）は、ガリレイによる自由落下運動を端緒とする問題の解決から微分積分学を扱う教材を提案しており、この教材は本稿の目的にも合う教材になっている。その一方で、この方法は長期的かつ詳細な史料を必要とするので、他の方法を採用することには教材開発の実行性を追求する上で価値がある。

学び」の実現に向けた授業改善の留意点における②を踏まえた判断である。またここでは教材を、授業において学習者に対して提示する問題場面と問い、及び、予想される学習者の反応に応じて連続的に展開される問いとする。

２．現実世界の問題解決を契機とする数学的探究を通した学習の意義

数学的モデル化やSTEM教育の学習の過程では、通常、数学または数学的思考は数学以外の問題を解決するための道具として位置付けられている（図２、３）。この過程を遂行する際の動機づけはもとの問題の解決であり、それゆえに解決の手段として用いられた数学的概念や命題、方法自体の探究は意図されていない。

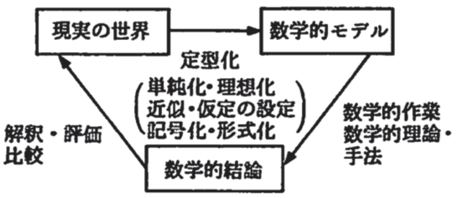

図２　数学的モデル化過程のモデル
（三輪 , 1983, p.120）

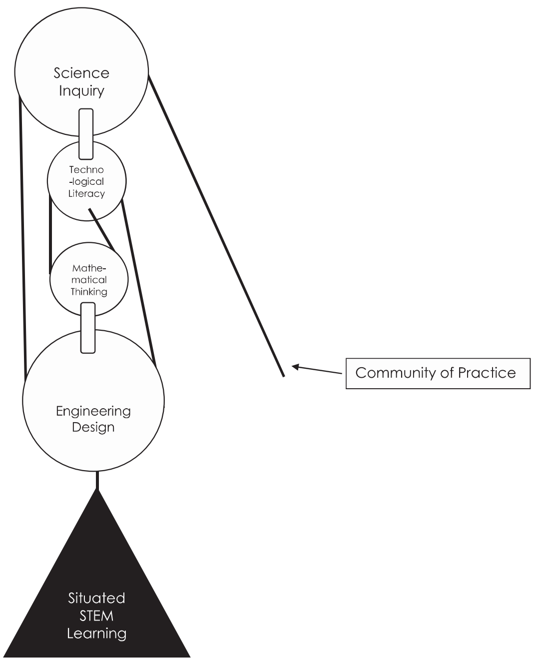

図３　STEM 学習の概念枠組みの図式
（T. R. Kelly & J. G. Knowles, 2016, p.4）

STEM教育の学習過程における数学の位置づけについては、学習のあり方やSTEM教育の目的論との対比から、次のような批判が提唱されている。二宮（2017）は、学習内容としての数学と学習方法としての数学について、「それぞれが相互構成的な位置づけであり、そもそも切り離して議論することはできない」（二宮，2017, p.210）とした上で、「数学の『内容』がSTEM教育に位置づいているかについては、非常に疑わしい。」（二宮，2017, p.210）とし、「学習の『方法』はそれ単独で学ばれるべきものではなく、必ず適切な『内容』を伴って学ばれるべきものである」。（二宮，2017, p.210）と主張している。竹内（2018）は、現実世界におけるＳ・Ｔ・Ｅ・Ｍの各領域の相互作用の認識がSTEM教育の目的として論じられていることと対して、数学が道具としてのみ位置づいていることを対比した上で、科学技術とともに発展してきた数学の歴史を無視していると指摘し、Ｓ・Ｔ・Ｅ・Ｍの統合が不平等であると主張している。

以上のような批判に対し、数学の世界の探究と現実の世界の探究を有機的に捉えている先行研究もある。島田（1995）は数学的活動のモデルとして、現実世界の問題の解決を端緒として数学の新理論の開発を行うプロセスを明示している（図４）。

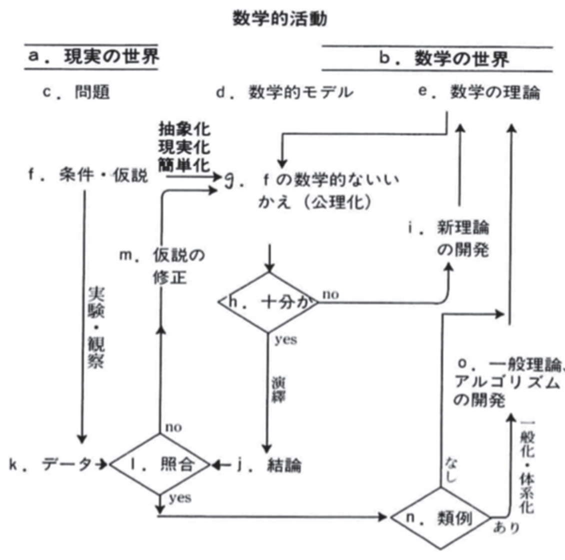

図４　数学的活動のモデル
（島田，1995, p.15）

このモデルは広く用いられる図２のような数学的モデル化過程とは異なり、現実の世界と数学の世界それぞれに言及した上で統合的に捉えており、本稿にとって示唆に富んでいる。しかしながらこのモデルにおける「i. 新理論の開発」は、「g. f の数学的ないいかえ（公理化）」による公理系からの演繹では十分に問題が解決できない場合に採られるプロセスとして説明されている。すなわち、あくまで動機づけは現実の世界の問題解決であり、そこで不足している数学を創造するという立場である。したがって、現実の問題の解決の過程で用いられた数学的概念や命題、方法自体を考察の対象と位置づける本稿の立場とは異なっている。

一方、池田（2017）は、「現実の世界の問題を解決することを目的に、数学の世界における知識がモデルとして利用されることを強調する立場で、現実の世界を豊かにしていくための手段として数学を見る」（池田，2017, p.3）応用指向と、「数学の世界を豊かにすること自体を目的としており、適宜、現実の世界での事象をモデルとして利用し数学の世界を豊かにしていくことになる」（池田，2017, p.3）構造指向とについて、両者の調和が従来から繰り返しなされてきた議論であると述べた上で、これら応用指向と構造指向を統合的に次のように解釈する。

> 応用指向であれ構造指向であれ、目的はある一つの世界で生じ、物事の仕組み（構造）を明らかにする目的のもとで、もう一つの世界にあるモデルを活用し目的を達成するという点で共通している。
>
> （池田，2017, p.3）

その上で池田は、この応用指向と構造指向が有機的に位置づく学習の実現を意図していることを、この研究の目的において次のように明言している。

> 本書の目的は、応用指向と構造指向といった二元論から離脱し、両者が互いに影響を与え合うことで数学的知識が絶えず成長していく活動を具体化するための教材開発の枠組みを構築するとともに、その枠組みをもとに、局所的な立場と大局的な立場から教材を開発することにある。
>
> （池田，2017, pp.3-4）

池田はこの研究目的を達成するために、具体的に五つの教材を開発し、これらを次の三点を観点とする分析・評価を実施している。

> ①　世界の区分をどのように捉え、複数の世界の行き来がどのようになされるか
> ②　各々の世界に作られたモデルが果たす役割は何か
> ③　数学的知識は、どのような過程を経て、どのように成長するのか
>
> （池田，2017, p.166）

池田の意図する応用指向と構造指向を統合した学習の実現は、本稿の意図と一致しており、研究成果は本稿の目的に対しても有益である。しかしながら、池田は数学の世界における活動である構造指向について、「抽象化が繰り返し行われることを忘れてはならない」（池田，2017, p.12）と述べており、この点で数学的探究の方向を限定している点が、本稿の意図とは一致していない。池田が用いる「構造主義」という語は数学教育の現代化期に強調された「新数学」または構造主義に由来するものである（ヴィットマン，2004）。この方向の数学的探究によって価値ある学習が実現可能であることは広く知られているものの（e.g., 杉山，2010）、数学の世界における数学的探究の方向は構造の抽出による抽象化のみではない。清宮（1988）が述べる「ある性質を想定し、その必要十分条件をしらべる」といった方向によって、抽象化を伴わずに新たな命題や定理を得ることもある。

以上を踏まえて、本稿では現実の問題の解決で用いられた数学的概念や命題、方法などを数学的対象と捉えなおす際に、その後の展開の方向を構造の抽出による抽象化に限定せずに数学的探究を行うこととする。このような探究ではその結果が発散することが想定できるが、学習者が現実世界の問題解決を契機とする数学的探究を通して「主体的・対話的で深い学び」を経験すること自体を意図する本稿においては、この発散は大きな問題ではない。

3．現実世界の問題解決を契機とする数学的探究を実現する教材の開発

（1）教材開発の手順

本稿では、先述のように、「帰納的構成」と内省的方法によって教材を開発する。素材の探索にあたっては、文学作品や音楽、物理現象などといった一般的に数学そのものと捉えられない事象や物事を検討し、それらに含まれる事象等から数学的モデル化の対象となるような題材を抽出し問題を設定することとする。この問題に対する数学的モデル化と、この数学的モデル化過程で用いられた数学的概念等を対象とした数学的探究を行ったのち、このプロセス全体で用いられた数学的内容や方法などを振り返って特定し、その結果を踏まえて教材として構成することとする。

（2）小説『鏡地獄』を題材とする数学的探究の教材[2]

①素材の選択

選択した素材は、江戸川乱歩による『鏡地獄』で描かれた、内面が鏡になっている球体の内部に入った友人が発狂するという場面である。凹型の球面鏡は、その形は想像が難しくないものの、実際にどのような像が映るかを想像することは容易ではない。実際、コンピューターグラフィックスによるモデルで状況を再現しようとする試みや、テレビ番組の企画で模型を作成して体験する試みが展開されるなど、人々の関心を集める素材であるといえる。

②現実世界の問題に対する数学的モデル化過程

この像の実際を検討することは容易ではないので、場面を単純化し、点光源から発せられた光が、鏡面でどのように反射を繰り返すかを検討する。また、球の中心を通る断面で考えることにする。この場合の光の振る舞いは、球の中心との関係によって大きく次の二つに分類できる。

a. 光が球の中心を通る場合（モデルA）

まずは、光が球の中心を通る場合を考える。光は中心を通過した後に鏡面に到達し、接点を通る接平面を反射面として、入射角と反射角が等しくなるように反射する。すなわちこの場合には中心に向かって反射する（図5）。この反射した光は再び球の中心を通り、中心に向かって反射することを繰り返す。したがって、光が円の中心を通る場合には、点光源と中心を通る弦上を動き続けることになる。

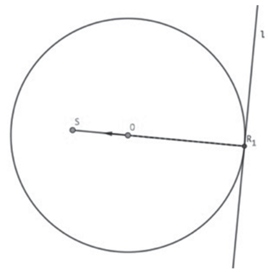

図5　中心を通った光が1回反射した状態

b. 光が球の中心を通らない場合（モデルB）

次に、光が球の中心を通らない場合を考える。光は中心を通らずに鏡面に到達し、先の場合と同様に、接点を通る接平面を反射面として、入射角と反射角が等しくなるように反射する（図6）。そして接平面とのなす角が直角でないことから、この反射した光は中心を通らずに進み、新たな接点で同様に反射する。これを繰り返すと、反射した光は点光源付近に戻ってくる（図7）。

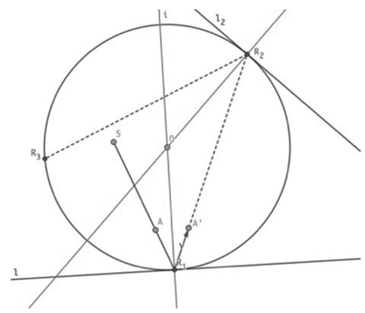

図6　中心を通らない場合の2回の反射

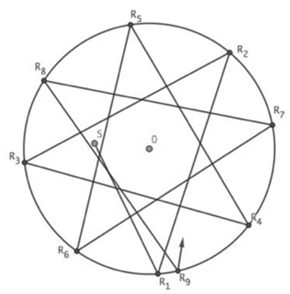

図7　中心を通らない場合の9回の反射

2　この教材についての教材開発の過程及び教材については、花園（2019）でも報告している。

③ 数学的モデルを考察対象とした数学的探究

次に、上記の過程で用いた数学的モデルを対象として問いを立てる。例えば、図3では光は点光源の近くを通っているものの点光源には戻ってきていないが、正確に戻る場合があるのか、戻る場合があるとしたらその必要十分条件は何か、といった問いが考えられる。

光の動きを記述するために、鏡面との接点を球の中心からの偏角を用いて、複素数平面上で図8のように捉えることとする。すなわち、点光源を $Z_0=1$ とし、反射角 $\alpha\left(\leq\frac{\pi}{2}\right)$ の場合の n 番目の光と球との接点（以降、反射点と呼ぶ）Z_n の偏角を θ_n とする。

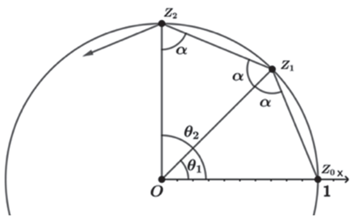

図8　複素数平面の単位円周上の点としての解釈

このとき、

$$\theta_n-\theta_{n-1}=\pi-2\alpha\quad(n\geq 2)\quad\cdots(*)$$

で一定であることと、円周角と中心角の関係から、

$$2\pi-\theta_2=2\times 2\alpha$$

$$\theta_2=2(\pi-2\alpha)$$

なので、

$$\theta_1=\pi-2\alpha$$

と定まる。よって、ド・モアブルの定理から、

$$\begin{aligned}Z_n&=\cos\theta_n+i\sin\theta_n\\&=\cos n\theta_1+i\sin n\theta_1\\&=\cos n(\pi-2\alpha)+i\sin n(\pi-2\alpha)\end{aligned}$$

となる。$Z_n=Z_0=1$ となるような α の必要十分条件を求めればよいので、まずは必要条件を定めるために、負でない整数 m に対し、$n(\pi-2\alpha)=2m\pi$ となるような α について考察する。

$$n(\pi-2\alpha)=2m\pi$$

を 2α について解くと、

$$2\alpha=\frac{n-2m}{n}\pi$$

となる。この式は、$\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ に矛盾しない。したがって、光が中心の周りを m 周した n 回目の反射点で点光源 Z_0 に戻るならば、このときの反射角 α について

$$2\alpha=\frac{n-2m}{n}\pi$$

が成立する。このとき、m は負でない整数、n は正の整数である。また、$\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ であるので、光は中心の周りを1周する間に4回以上は反射する。つまり、$n\geq 4m$ である。したがって、$\frac{n-2m}{n}$ は（正の）有理数である。

次に、十分条件を考察する。p,q を正の整数とし、$p\leq q$ とする。いま、反射角 α について、$2\alpha=\frac{q}{p}$ と表せるとする。このとき、正の整数 k を用いて、

$$\begin{cases}m=(q-p)k\\ n=2qk\end{cases}$$

ととれば、

$$\frac{q}{p}=\frac{n-2m}{n}$$

となり、$n(\pi-2\alpha)=2m\pi$ を満たす。すなわちこのとき、光は中心の周りを $m=(q-p)k$ 周した $n=2qk$ 回目の反射点で、点光源 Z_0 に戻る。

以上より、入射角が π の有理数倍の場合には、光はいずれ点光源に戻ってくるが、入射角が π の無理数倍の場合には、点光源には戻らずに反射を繰り返すということがわかる。

④用いられた数学的内容と数学的方法の特定

以上の数学的探究を振り返ると、複素数とその極形式、ド・モアブルの定理、円周角の定理という数学的内容を用いていた。また、複素数平面上で図形を考察するという解析幾何的な方法と、必要条件と十分条件をそれぞれ求める論証を、方法として用いた。

これらのうち、複素数平面の代わりに直交座標平面上で図形を考え、ド・モアブルの定理の代わりに漸化式を考えることによって、次のように同じ解を得ることもできる。

まず、光と鏡面との接点の座標を $Z_{\mathrm{n}}\,(\cos\theta_n,\sin\theta_n)$ と捉える．式 $(*)$ は同様に得ることができるので、この漸化式から数列 θ_n は等差数列であるとわかり、初項は $\theta_1=\pi-2\alpha$ であるので、

$$\theta_n=n(\pi-2\alpha)$$

として一般項を求められる。Z_n の座標が $(1,0)$ になるような α の必要十分条件を求めればよいので、以降は先の方法と同様になる。

複素数平面やド・モアブルの定理を用いるために

表１　小説『鏡地獄』を題材とする数学的探究の教材

教材の構成要素	各構成要素の内容
問題場面	江戸川乱歩の『鏡地獄』における「友人」の発狂が発覚する場面（詳細は省略）。
問い	発狂した「友人」には何が見えたのか。
反応に対する問い （「→」以降）	＜反応予想１＞ 身の回りにある金属を用いて想像したり，スマートフォンの自撮り機能を用いて試したりする。 →図を描いて考える方法に焦点化させ，数学的モデル化による解決を促す。 ＜反応予想２＞ 数学的モデル化によって，「友人」が見たものについて何らかの解釈を得る。 →数学的モデルとして用いた図形について気づいたことを問う。 ＜反応予想３＞ ・　光が点光源に戻ることはあるのか。戻るのであればどのような場合か。 ・　光が通らない空間はどのような図形か。その体積（面積）はどの程度か。

は、数学Ⅲで扱われる内容が既習である必要がある。一方で、三角関数と直交座標平面及び漸化式を用いるためには、数学Ⅱと数学Ｂで扱われる内容が既習である必要がある。すなわち、上記の数学的探究は、数学Ⅱと数学Ｂまたは数学Ⅲまで学習した高校生を対象とする教材として構成できることが考えられる。

⑤教材の構成

ここまでで記述した教材分析の結果を踏まえて、高校生を対象とする教材を次の表１のように構成する。

（３）光の屈折を題材とする数学的探究の教材

①素材の選択

選択した素材は、光の屈折である。光は二点間を移動するのにかかる時間が最短になるように進み、空気と水、ガラスといった異なる溶媒をまたがる場合には、図９のように屈折することが知られている。この事象については、コップに入ったストローを覗き込む際や、水槽の内部を覗き込む際などに、多くの人が経験していると思われる（図10）。

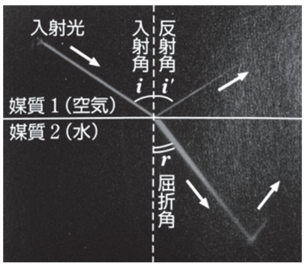

図９　空気と水の境界における屈折
（三浦他，2009，p.232）

図10　動物園の水槽と屈折

②現実世界の問題に対する数学的モデル化過程

この光の屈折の法則を理解することを問題と捉え、数学を用いて解決するために次のように記号をおく。まず、図11のように点Ａを速さ v_1 で出発した光が境界上の点Ｐにおいて屈折し、速さ v_2 で点Ｂに達しているとする。ただし、点Ｐは一点であると仮定する（産総研，2004）。仮に点Ａを水中の点、点Ｂを空気中の視点だとすると、点Ａで反射して点Ｂに到達する光は、点Ｂからは直線 I_A Ｂ上を進んできたものと錯覚される。このとき、点Ｐにおける入射角 α と屈折角 β の間の関係を考える。

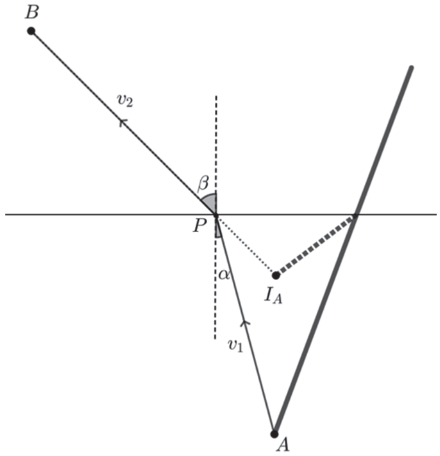

図11　点Ａから点Ｂへの光の点Ｐにおける屈折のモデル

いま、点Ａ、点Ｂから境界におろした垂線の足をそれぞれＡ'、Ｂ'とする。また、ＡＡ'、ＢＢ'、Ａ'Ｂ'、Ａ'Ｐの距離をそれぞれ a、b、l、x と表すと図12のようになる。

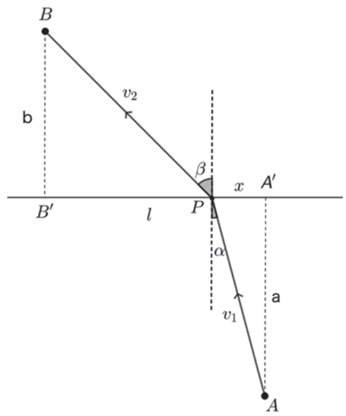

図12　光の屈折のモデル（記号付き）

この図12において、

$$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{\mathrm{a}^2 + x^2}\ ,\quad \overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{\mathrm{b}^2 + (l - x)^2}$$

が成り立っている。よって、点Ａから点Ｐまでの光の移動時間 $\mathrm{T_{AP}}$ と、点Ｐから点Ｂまでの光の移動時間 $\mathrm{T_{PB}}$ はそれぞれ、

$$\mathrm{T_{AP}} = \frac{\sqrt{\mathrm{a}^2 + x^2}}{v_1}\ ,\quad \mathrm{T_{PB}} = \frac{\sqrt{\mathrm{b}^2 + (l - x)^2}}{v_2}$$

と表せる。点Ｐにおける光の屈折は、点Ａから点Ｂまで移動する時間が最短になるように屈折しているはずなので、$\mathrm{T_{AP}} + \mathrm{T_{PB}}$ が最小値をとる状態が成り立っていると考えられる。$\mathrm{T_{AP}} + \mathrm{T_{PB}} = T(x)$ とすると、

$$T(x) = \frac{\sqrt{\mathrm{a}^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{\mathrm{b}^2 + (l - x)^2}}{v_2}$$

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{\mathrm{a}^2 + x^2}} + \frac{-(l - x)}{v_2\sqrt{\mathrm{b}^2 + (l - x)^2}}$$

いま、

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{\mathrm{a}^2 + x^2}}\ ,\quad \sin\beta = \frac{l - x}{\sqrt{\mathrm{b}^2 + (l - x)^2}}$$

であるので、

$$T'(x) = \frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{\sin\beta}{v_2}$$

と表せる。したがって、$T'(x) = 0$ となるのは、

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}$$

であり、ここで、

$$T''(x) = \frac{\mathrm{a}^2}{v_1(\mathrm{a}^2 + x^2)\sqrt{\mathrm{a}^2 + x^2}} + \frac{\mathrm{b}^2}{v_2\{\mathrm{b}^2 + (l - x)^2\}\sqrt{\mathrm{b}^2 + (l - x)^2}} > 0$$

である。この不等式から $T'(x)$ は単調増加しているとわかるので、$T'(x) = 0$ となる点は与えられた定数に対して１点のみで、$\mathrm{T_{AP}} + \mathrm{T_{PB}} = T(x)$ はこの点で極小値かつ最小値をとる。

以上より、図11のような屈折が起こっている際、点Ｐにおける入射角 α と屈折角 β の間には、

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{v_2}{v_1} \cdots \text{(i)}$$

という関係が成り立っている（スネルの法則）。この右辺の v_1 と v_2 は溶媒によって定まるので、二種の溶媒の間の屈折について一度この比 (i) を計測することによって、同じ二種の溶媒で起こる屈折については計算で説明することができる。例えば、点Ａを水中の点、点Ｂを空気中の点であるとすると、この場合の比 (i) は約1.33であることが知られている（三浦他、2009）。したがって、この場合で β=45° であるとすると、次のように計算できる。

$$\sin\alpha \fallingdotseq (1 \div 1.41) \div 1.33 = 0.53$$

$$\alpha \fallingdotseq 32°$$

③数学的モデルを考察対象とした数学的探究

②の比 (i) の関係を図形的に解釈すると、例えば次の図13のようなものが考えられる。この図13では、点Ｐを中心に半円が描かれている。これを光の移動距離

と見ると、

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{CE}}$$

となっている。ただし、CとDは光と円の交点であり、EとFはそれぞれ、点Pを通る境界の垂線にCとDからおろした足である。また、v_1 と v_2 が定数である場合はこの右辺は一定であるので、CEとDEは比例していることがわかる。

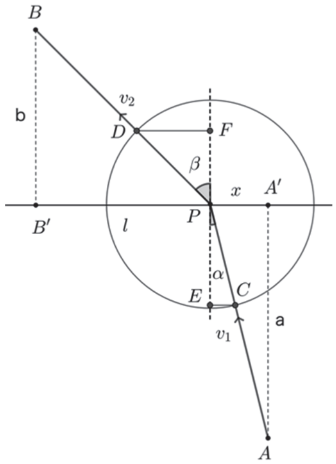

図13　スネルの法則の図形的解釈

この２線分CE、DEの比例関係に着目し、この比例関係を与えられた条件として事象を捉えなおしてみると、図14のような図を得ることができる。この図14を用いて線分CEを境界面（線）との平行を保ったまま平行移動していくと、α と β が大きくなり、β が鈍角になることがわかる。この境界である β=90° の場合の α の値は、例えば先の比1.33を用いると次のように求めることができる。β=90° のとき、sin β=1 であるので、

$$\sin\alpha \fallingdotseq 1\div 1.33=0.75$$

$$\alpha \fallingdotseq 49°$$

となる。

この数学的事象について、改めて元の光の屈折を解釈すると、点Aから点Bに向かっていた光は境界（水面）で反射し、直線EFに関して線対称（３点A、P、Bを含む平面に垂直で、直線EFを含む面に関して面対称）に進む。これは全反射と呼ばれる現象であり、屈折と同じ法則で起こる事象であることが確認できる。

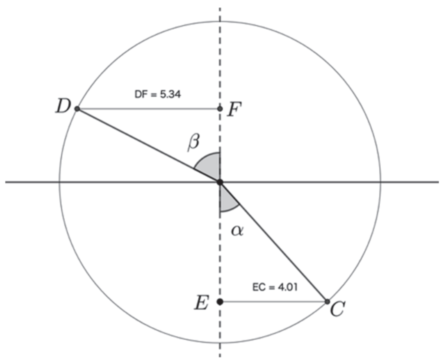

図14　CE、DEの比例関係を前提にした図

④用いられた数学的内容と数学的方法の特定

以上の数学的探究を振り返ると、無理関数とその導関数、第二次導関数と導関数及び原始関数の関係、三角関数と三角関数表という数学的内容を用いていた。また、③の考察では先に得られていた結論である比例関係を仮定と捉えなおして考察する「逆の研究」(清宮、1988）に類する考え方を用いた上で、図を動的に捉えて観察した。

無理関数と第二次導関数については、数学Ⅲの学習内容として位置づいている。三角関数については基本的には鋭角と直角の範囲で用いているものの、T(x)とおいた関数の導関数にも含まれており、これは関数として扱う数学Ⅱ以降の内容である。命題の逆は中学校の図形領域から数学Ⅰにかけての学習内容であり、図形を動的に捉えることは学習指導要領で定められた学習内容ではないながら、中学校の図形領域でも広く用いられている考え方である。

⑤教材の構成

ここまでで記述した教材分析の結果を踏まえて、高校生を対象とする教材を次の表２のように構成する。

表２　光の屈折を題材とする数学的探究の教材

教材の構成要素	各構成要素の内容
問題場面	水入りのコップに入ったストローや水族館などの写真を提示する。または，「水中マジックカード」（新潟県理化学協会研究部物理グループ）のような手品を実演する。
問い	光の屈折はどのような法則で起こっているのだろうか。
反応に対する問い （「→」以降）	＜反応予想１＞ コップなどの実物を用いて観察する。写真などがある場合には，入射角と屈折角を実測するなどを通して，これらの関係を調べる。 →図を描いて考える方法に焦点化させ，数学的モデル化による解決を促す。 ＜反応予想２＞ 数学的モデル化によって，スネルの法則を得る。 →屈折率（入射角と屈折角の正弦の比）が，数学的モデルである図形上ではどのように表現できるかを問う。比例関係を仮定とした場合に，この図形上で起こりそうな数学的事象を問う。 ＜反応予想３＞ ・　屈折角 β が90° 以上になることがあるのか。なるとしたら，その場合の α の値の範囲はどうなっているか。 ・　異なる溶媒に含まれる平面図形を見た場合，図形はどのように変わるか。実際の図形に対して相似な図形になるのか。

４．まとめと今後の課題

以上の二つの教材に取り組むことで、学習者は、前章に記述したような、現実世界の問題の解決を契機とした数学的探究を経験できると考えられる。そしてその過程では、数学の問題を見出すことや、現実世界の問題と数学の問題の双方に対して、数学的内容や数学的方法を用いる問題解決を経験することが期待できる。

本稿で提示した二つの教材は、どちらも光に関する題材をもとに開発した。この開発過程は意図的なものではなく、先述のように探索的に行った結果としてこれらの題材が選出された。しかしながら、光の反射や屈折という事象は幾何学との相性がよく、図形の数学的モデルを得やすいと言える。また、図形の数学的モデルは元の事象から脱文脈化することが容易であり、本稿で意図する学習過程が実現しやすいと考えられる。ただし、元の事象と完全に無関係な数学的問題を定式化すると、本稿の意図する「現実世界の問題解決を契機とする数学的探究」とは言い難いものになりうる。本稿で提示した二つの教材では、図形を動的に捉える際にも元の事象の考察で用いたような動き方の範囲にした。このことは、二つ目の光の屈折を題材とする教材で全反射の考察に至ったように、最終的に元の事象の理解の深化に寄与する可能性がある。そしてこの理解の深化は、数学的モデル化に関する学習やSTEM 教育の目指す学習の目的や目標に合致するものであると考える。

今後の課題はさらに多くの教材を開発した上でそれらを用いた実践的研究を展開し、その特徴や効果について検討することである。

文献

江戸川乱歩（1926）．『鏡地獄』． https://www.aozora.gr.jp/cards/001779/files/57343_60022.html（2021年9月22日　最終閲覧）．

ハイラー，E.・ワナー，G.（1997）．『解析教程　上』．シュプリンガー・フェアラーク東京．

花園隼人（2019）．「現実世界の問題解決を契機とする数学的探究を実現する教材の開発」．日本科学教育学会年会論文集．43．343-346

長谷川榮（2013）．「教材の構成」．日本教材学会（編）「教材事典教材研究の理論と実践」．(pp.28-30)．東京堂出版．

池田敏和（2017）．『モデルを志向した数学教育の展開－「応用指向 vs 構造指向」を超えて－』．東洋館出版社．

Kline, M.（1974）. *Mathematics in western culture*. Oxford University Press.

文部科学省（2019）.『高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説　数学編　理数編』. 学校図書.

三浦登他（2009）.『物理Ⅰ』. 東京書籍株式会社.

新潟県理化学協会研究部物理グループホームページ.「水中マジックカードをつくろう」.
http://www.info-niigata.or.jp/~ymiyata/others/magic/magic.htm（2021年９月22日　最終閲覧）

二宮裕之（2017）.「STEM 教育における数学の位置づけ－数学は STEM の『道具』に過ぎないのか－」. 日本科学教育学会年会論文集. 41. 209-210.

産総研（2004.09.08）.「光のホール効果を解明」
https://www.aist.go.jp/aist_j/press_release/pr2004/pr20040908/pr200400908.html（2021年９月22日最終閲覧）

清宮俊雄（1988）.『幾何学－発見的研究法－』. 科学新興新社.

杉山吉茂（2010）.『復刻　公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』. 東洋館出版社.

竹内歩（2018）.「STEM 教育における不平等な統合の改善－数学と SYEM 領域の相互作用への着目－」. 日本科学教育学会年会論文集. 42. 545-546.

塚原久美子（2002）.『数学史をどう教えるか　算数・数学の授業における数学史活用の目的・方法と実践』. 株式会社東洋書店.

ヴィットマン, E. C. 著, 國本景亀・山本信也訳（2004）.『算数・数学　授業改善から教育改革へ』. 東洋館出版社.

山本和夫（1978）.「水族館の展示水槽内における光の屈折透過について」. 福井工業大学研究紀要. 8. 33-45.

著者名非公開のブログ：https://hyperion64.hatenadiary.org/entry/20140201/p1（2021年９月22日　最終閲覧）

（令和３年９月30日受理）

Development of Teaching Materials for Mathematical Inquiry Triggered by Real-world Problem Solving

HANAZONO Hayato

Abstract

In geometry, which developed from the practical problem of measurement, non-Euclidean geometry was established as a result of research that was triggered by a "sense of discomfort" in one of the axioms, which developed across time and regions. It is widely recognized that mathematics has been developed by abstract mathematical inquiry away from real-world problem situations. The purpose of this paper is to develop teaching materials for realizing this kind of mathematical inquiry in the classroom, which is triggered by the solution of real-world problems. For this purpose, this paper analyzes a specific scene in Edogawa Rampo's "Kagami Jigoku" and the phenomenon of refraction of light seen in an aquarium, etc., through the process of mathematical modeling. After the analysis of the mathematical modeling process, the author conducted a mathematical inquiry of the model itself as a teaching material analysis. Based on the results of this series of teaching material analysis, the author composed teaching materials. The future task is to practically evaluate and improve the teaching materials by using the developed teaching materials.

Key words： Mathematics education, Development of teaching materials, Mathematical inquiry, Mathematical modeling