義務教育段階における数学的に考える資質・能力を育成するための一貫的な指導に関する研究

－現職教員研修プログラムの開発と評価－

*花　園　隼　人・*市　川　　啓・**鎌　田　博　行
佐　藤　得　志・*田　谷　久　雄

要　旨

義務教育段階の算数・数学に関わる教員には、９年間を見通して児童・生徒の数学的に考える資質・能力を育成することが求められている。長期的な展望をもった指導計画の作成や教材の開発に係る専門性を備えた教員の養成やそのような専門性の向上を促す現職教員研修のプログラムを開発することは、教員養成大学にとっての早急の課題である。

本稿の目的は、義務教育段階における数学的に考える資質・能力を育成するための一貫的な指導を可能とする、算数・数学科教員の専門性向上のための研修プログラムを開発することである。そのために、中央教育審議会答申等を踏まえて開発した現職教員研修プログラムを実施し、研修に参加した教員を対象としたアンケートへの回答を分析することで、その有効性を実証的に検証した。その結果、異なる学校段階に共通して登場する数学的内容を視点としてもつこと、異なる学校段階の教員が協働で教材研究をすることの有効性が確認された。その一方で、そのような数学的内容の理解には参加者の数学的熟達性による差異が見られ、その数学的熟達性を加味したプログラムを考案する必要性が確認された。

Key words： 数学教育、現職教員研修、教員養成、数学的に考える資質・能力、義務教育

１．はじめに

義務教育段階の算数・数学に関わる教員には、９年間を見通して児童・生徒の数学的に考える資質・能力を育成することが求められている。中央教育審議会答申で示された「令和の日本型学校教育」では、平成29年改訂の学習指導要領で目標に位置づいた「育成を目指す資質・能力」を確実に育む方策として、小学校における教科担任制が言及された。特に算数科は、令和４年度から導入される高学年の教科担任制の対象として挙げられている。答申は、既に全国で実施されている「算数専科」の指導体制を認め、促進するものであると言える。

一方、文部科学省が実施した「小中一貫教育の導入状況調査」(平成29年３月実施）では、「９年間の系統性に配慮した指導計画の作成・教材の開発」が学習指導等に関する最大の課題であることが明らかになった。すなわち、このような指導計画の作成や教材の開発に係る専門性を備えた教員の養成や、そのような専門性の向上を促す現職教員研修のプログラムを開発すること、そしてその成果として指導計画や教材を得ることは、教員養成大学にとっての早急の課題である。

平成31年度の本学における重点支援研究（代表：市川）では、数学的経験が小学校教員にもたらす効果が実証的に確認された。本研究はこの成果を基礎とし、中学校教員との協働によってその効果の向上や小中学校

*　宮城教育大学 教科教育学域（数学教育学）
**　宮城教育大学 教科内容学域 理数・生活科学部門（幾何学）
***　宮城教育大学 教科内容学域 理数・生活科学部門（解析学）
****　宮城教育大学 教科内容学域 理数・生活科学部門（代数学，数論）

の一貫性に関する専門性の向上を期待するものである。

本稿の目的は、義務教育段階における数学的に考える資質・能力を育成するための一貫的な指導を可能とする算数・数学科教員の専門性向上のための研修プログラムを開発することである。この目的のために、中央教育審議会答申等を踏まえて開発した現職教員研修プログラムを実施し、プログラムに参加した現職教員を対象としたアンケートへの回答を分析することで、その有効性を実証的に検証する。

2．現職研修プログラムの開発

2.1　プログラム開発の指針：2020年代に求められる専門的な教科指導

2.1.1 「令和の日本型学校教育」と教科指導

中央教育審議会答申（2021年１月26日、第228号、以降「令和３年答申」）では、2020年代を通じて実現すべき「令和の日本型学校教育」として、幼児教育、義務教育、高等学校教育等、特別支援教育といった各学校種等における教育、外国人児童生徒等への教育やICT を活用した教育のあり方などが総括された。この背景には、第４次産業革命やSociety5.0などと呼ばれる、人工知能（AI）等の高度化に伴う社会の急激な変化や、現在なお世界中に混乱を生じさせているCovid19に代表されるような予測困難性の認識といった社会的要因のほか、学習意欲の低迷やいじめの増加などといった日本の学校教育における積年の課題、子どもたちの多様化や教師の多忙化といった社会構造等の変化に応じて明らかになってきた課題などがある。この「令和３年答申」では、このような重層的で複雑な教育課題に対する国の方策が示されたと言える。

この「令和３年答申」の中で各論の一つとして取り上げられた「９年間を見通した新時代の義務教育の在り方」では、その「基本的な考え方」である三つの項目のうちの一つとして、「小学校６年間、中学校３年間と分断するのではなく、９年間を通した教育課程、指導体制、教師の養成等の在り方について一体的に検討を進める必要がある」(中央教育審議会，2021，p.39）ことが確認された。そして具体的に、令和４年度以降に小学校高学年から算数を含む複数の教科で教科担任制を導入することや、教職課程で小学校と中学校両方の免許を取得しやすくする特例を設置することなどが示されている。学習内容が抽象化・高度化する小学校高学年以降においては特に、教師には教科指導についての高い専門性が求められている。

この小学校高学年における教科指導の専門性の強化については、中央教育審議会答申（2016年12月21日、第197号、以降「平成28年答申」）においても、「育成を目指す資質・能力の育成に確実につなげるため」(中央教育審議会，2016，p.84）の課題として挙げられている。この「育成を目指す資質・能力」(以降、資質・能力と略記）とは、この「平成28年答申」において育成の対象とされたものであり、各教科等の知識や技能に加え、その知識等を活用する思考力・判断力・表現力等や、学習態度なども総括したものとして再定義された新たな学力である。

このような学力の捉え方、すなわち学力観は、平成元年改訂の学習指導要領において、既に確認することができる。例えば算数科では、従前の学力観について、

> 指導する側の立場から、<u>基礎的・基本的な内容を一定の知識や技能などを中心としたものととらえ</u>、それらを教え込むといった傾向がみられることがあった
>
> （文部省，1993，p.6，下線は引用者）

こと、及び、

> 教師主体の学習指導に子供が慣れてしまうと、教師の指示などをいつまでも待つことになり、自分で考えたり、判断したり、試みたりすることの楽しみや喜びを味わおうとする意欲がなくなっていくことがある
>
> （同上，p.4）

といった問題意識があった。そして、

> 新しい教育は、自ら学ぶ意欲と社会の変化に主体的に対応できる資質や能力を育成することを願い、子供一人一人が自ら進んで考え、判断し、自信をもって表現したり、行動したりできる創造的な資質や能力の育成を目指している。そのためには、すでに述べたように<u>自ら学ぶ意欲や能力、思考力、判断力及び表現力などを学力の基本とする学力観</u>に立ち、（後略）
>
> （同上，p.6，下線は引用者）

数量や図形についての基礎的な知識と技能は、（中略）実際に問題を解決したり数理的な処理をしたりする場合に、的確かつ能率的に用いることができてはじめてその真価が発揮される

（同上，p.9）

ということが確認されている。すなわち、学力の基礎・基本を、「教科等の知識や技能」として捉える学力観から、「自ら学ぶ意欲や能力、思考力、判断力及び表現力など」として捉える学力観への転換が図られている。「平成28年答申」では、この新たな学力観を基礎におく資質・能力の育成に向けた課題として、小学校においても教科指導の専門性が不可欠であることが強調されたのである。

以上のように、「令和３年答申」で強調された教科指導の専門性は、従前の元号である平成の時代が始まる際には既に図られていた学力観の転換を背景にもつものであり、時代の激しい変化によってその緊急性が強調されたものであると言える。

以下ではこの専門性を具体的に捉えるために、この専門性を用いて育成する資質・能力を次の手順で確認する。まず、「平成28年答申」に先立ってまとめられた「育成すべき資質・能力を踏まえた教育目標・内容と評価の在り方に関する検討会」による「論点整理」（平成26年３月31日、以降「論点整理」）を確認する。次いで、「平成28年答申」を確認し、ここで提唱された資質・能力の不明瞭な点を「論点整理」の内容をもとに補う。このことによって、本稿における現職研修プログラム開発の指針としての専門性を定めることにする。

2.1.2　育成を目指す資質・能力の三層

「論点整理」では、「生きる力」などといった国内における教育に関する法規や過去の検討内容、コンピテンシーや21世紀スキルなどといった国際的に教育目標論に据えられてきた概念などを踏まえ、次の三層による資質・能力の捉え方が提案された（表１）。

表１　資質・能力の三層（「論点整理」p.21をもとに作成）

ア）教科等を横断する、認知的・社会的・情意的な汎用的なスキル（コンピテンシー）等に関わるもの
具体例：問題解決、論理的思考、コミュニケーションなど
イ）教科等の本質に関わるもの
具体例：その教科等ならではのものの見方・考え方、処理や表現の方法など
ウ）教科等に固有の知識・個別スキルに関わるもの

この「論点整理」の検討会の委員の一人である奈須は、この三層構造を次のように解説する。

まず、注目すべきは「ア）教科等を横断する汎用的なスキル（コンピテンシー）等に関わるもの」と、「ウ）教科等に固有の知識や個別スキルに関するもの」の間に、「イ）教科等の本質に関わるもの（教科等ならではの見方・考え方など）」が位置付いているという構造それ自体であろう。コンピテンシーとコンテンツという、ややもすれば対立しかねない２つの学力側面を、教科の本質が仲立ちし、有機的に結びつける関係になっているのである。

（奈須ら，2015，p.20）

その上で奈須は、この教科の本質を次の二つの水準で説明する。一つ目は「その教科の個別知識・技能を統合・包括する『鍵概念』で、『本質的な問い』『大きな概念（big idea）』などと呼ばれてきた水準」（同上，p.20）である。そして二つ目は「その教科ならではの認識・表現の『方法』であり、（中略）算数・数学科における『帰納・類推・演繹』などがその代表的なもの」（同上，p.20）である。算数・数学科における前者の「鍵概念」として、奈須は割合に関する「１つ分のいくつ分」（同上，p.20）を挙げている。このほか、この「鍵概念」に相当するものとして知られているものには、OECD の PISA において教科内容を整理した「包括的アイディア」があり、これは「量」、「空間と形」、「変化と関係」、「不確実性」の四つのカテゴリーで構成されている[1]。また、このカテゴリーを提示し

1　調査対象である「数学的リテラシー」が初めて明確に定義された2003年調査時のもの（OECD，2004，国立教育政策研究所監訳，2005）。この定義が改定された2012年調査では内容カテゴリーと称され、「不確実性」が「不確実性とデータ」に名称変更されている。この変更は内容の変更を意味しないことが注意されている（OECD，2013，国立教育政策研究所監訳，2016）。

たOECDの報告書では、数学的な内容に対する同様な分類を行なった著名な出版物として、Steen（1990）とDevlin（1994）を挙げている。この二つの書籍については後述する。算数・数学科における後者の「方法」について、奈須が挙げた三つの形式の推論は「数学的な考え方」と呼ばれてきたものの一部である。この他の「数学的な考え方」としては、「関数の考え」（中島、2015）や「公理的方法」（杉山、2010）がよく知られている。

2.1.3　育成を目指す資質・能力の三つの柱としての再整理

以上のように整理された資質・能力は、中央教育審議会の初等中等教育分科会の下、教育課程企画特別部会における審議のまとめである「教育課程企画特別部会における論点整理について」を踏まえ、「平成28年答申」では次の三つの柱で捉え直された（中央教育審議会，2016，pp.29-31）。

①「何を理解しているか、何ができるか（生きて働く「知識・技能」の習得）」
②「理解していること・できることをどう使うか（未知の状況にも対応できる「思考力・判断力・表現力等」の育成）」
③「どのように社会・世界と関わり、よりよい人生を送るか（学びを人生や社会に生かそうとする「学びに向かう力・人間性等」の涵養）」

この三つの柱は教育課程の枠組みとして採用され、この「平成28年答申」に基づいて改訂された学習指導要領では、教科等の目標や内容の再整理の軸として用いられた。例えば小学校算数科の目標は次のように定められた。

数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す。
（１）数量や図形などについての基礎的・基本的な概念や性質などを理解するとともに、日常の事象を数理的に処理する技能を身に付けるようにする。
（２）日常の事象を数理的に捉え見通しをもち筋道を立てて考察する力、基礎的・基本的な数量や図形の性質などを見いだし統合的・発展的に考察する力、数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表したり目的に応じて柔軟に表したりする力を養う。
（３）数学的活動の楽しさや数学のよさに気付き、学習を振り返ってよりよく問題解決しようとする態度、算数で学んだことを生活や学習に活用しようとする態度を養う。
（文部科学省，2018，pp.21-22）

周知のとおり、（１）が「知識・技能」、（２）が「思考力・判断力・表現力等」、（３）が「学びに向かう力・人間性等」に対応しており、この構造は学校種や教科等を問わず共通している。

2.1.4　カリキュラムを捉える視点としての「数学的な見方・考え方」

資質・能力を捉える三つの柱に関する３項目の前の１文は総括目標と呼ばれ、その内容は小学校算数科、中学校数学科、高等学校数学科で共通している。このことから、小学校から高等学校までを通した長期的な展望をもって、数学的に考える資質・能力を育成することが望まれていることが窺える。

この総括目標には、「数学的な見方・考え方」という語が含まれている。この語は次のように定義されるものである（表２）。

表２　数学的な見方、考え方と見方・考え方[2]

数学的な見方： 事象を数量や図形及びそれらの関係についての概念等に着目してその特徴や本質を捉えること（小・中・高共通）
数学的な考え方： ・目的に応じて数、式、図、表、グラフ等を活用しつつ、根拠を基に筋道を立てて考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能を関連付けながら、統合的・発展的に考えること（小） ・目的に応じて数、式、図、表、グラフ等を活用しつつ、論理的に考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能を関連付けながら、統合的・発展的に考えること（中） ・目的に応じて数、式、図、表、グラフ等を活用しつつ、論理的に考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能を関連付けながら、統合的・発展的に考えたり、体系的に考えること（高）

2　文部科学省（2018a，pp.22-23）、文部科学省（2018b，p.21）、及び、文部科学省（2019，p.24）をもとに作成。

数学的な見方・考え方： ・事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、根拠を基に筋道を立てて考え、統合的・発展的に考えること（小） ・事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えること（中） ・事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的、体系的に考えること（高）

この表２にあるとおり、「数学的な見方」については小学校算数科から高等学校数学科まで、同じ内容・表現で定義されている。一方、「数学的な考え方」については、中学校数学科及び高等学校数学科で「論理的に考え」と表現されている部分が、小学校算数科ではより素朴な「根拠を基に筋道を立てて考え」と表現されている。また、高等学校では「体系的に考えること」が追加されている。この二つをまとめた「数学的な見方・考え方」では、上記の「数学的な考え方」についての差異が反映された形になっている。また、この「数学的な見方・考え方」は、各学年または科目の内容を反映した「思考力・判断力・表現力等」として資質・能力の形式に具体化されて目標に記されている。例えば、次のようなものがある。

・ものの数に着目し、具体物や図などを用いて数の数え方や計算の仕方を考える力（小学校第１学年）
・数学的な推論の過程に着目し、図形の性質や関係を論理的に考察し表現する力（中学校第２学年）
・座標平面上の図形について構成要素間の関係に着目し、方程式を用いて図形を簡潔・明瞭・的確に表現したり、図形の性質を論理的に考察したりする力（高等学校数学Ⅱ）

このように、内容・表現が統一されて定義された「数学的な見方」については、着目する対象が当該の教科内容として具体化されることによって、異なる学校種等の間の関係が見えにくい形になっている。その一方で、学校種によって異なる内容・表現で定義された「数学的な考え方」については、「論理的な考察」のような学校種等をまたがる目標概念が位置づいている。

先述のように、「数学的な見方・考え方」は小学校算数科から高等学校数学科まで同一の内容で示された教科の総括目標に含まれており、長期的な展望をもって学習者の「数学的な見方・考え方」を豊かにしていくことが望まれていると言える。また、特に義務教育段階においては、「令和３年答申」で示されたように、９年間を通した教科指導の必要性が確認されている。したがって、「数学的な見方」についても、「数学的な考え方」と同様に、学校種等をまたがる形で捉える必要がある。

「数学的な見方」は学習者が着目すべき数学的内容に関するものであるので、この目的を達成するためには学校種等をまたがる数学的内容に着目することが有益である。そしてそのような数学的内容としては、「論点整理」における「見方・考え方」の「鍵概念」が参考になる。しかしながら、OECD の PISA で用いられた「量」、「空間と形」、「変化と関係」、「不確実性」というカテゴリーでは、着目する対象としては抽象的であると考える。そこで本研究では、OECD の報告書でも参照されていた Steen（1990）を参照する。この文献では、同様に参照されていた Devlin（1994）よりも多様な分類の観点が提示されており、「数学的な見方」として着目する対象を特定しようとする本稿の目的により合致している。

Steen（1990）では、この文献で採用した分類による数学的内容の説明に先立って、この文献で採用していない分類の観点を提示している。例えば、次のものがある[3]。

・構造：数／形／アルゴリズム（算法）／関数／比／データ
・特徴：線形的／ランダム（無作為）／周期的／最大／対称的／近似的／連続的／なめらか
・活動：表現／モデル化／制御／実験／証明／分類／発見／視覚化／応用／計算

これらのうち、「特徴」の観点では「線形的」や「対称的」のように、小学校算数科から高等学校数学科まで一貫して着目する数学的概念が挙げられている。そして当然のことながら、これらの数学的概念は学校数学に限定されて着目されるものではなく、学問としての数学において重要な概念でもある。

ここまでの考察を踏まえ、本稿で焦点を当てる「義務教育段階における数学的に考える資質・能力を育成するための一貫的な指導を可能とする算数・数学科教

3　Steen（1990, p.3）から抜粋して引用。

員の専門性」を、次のように定める。すなわち、この専門性を「教師自身が豊かな『数学的な見方・考え方』をそなえ、その指導についても熟達していること」として捉える。そして特にこの「数学的な見方・考え方」の「数学的な見方」については、着目する対象を、「数量や図形及びそれらの関係についての概念等」の中でも長期的な展望をもつ上で有益な、数学の「鍵概念」とし、Steen（1990）で挙げられたような、学校数学はもとより学問としての数学でも重要な数学的概念として捉えることとする。

この専門性の向上を図るプログラムでは、教師の「数学的な見方・考え方」を豊かにすること、特に長期的な展望のもちにくい「数学的な見方」に関して、「鍵概念」を視点とした長期的で広範な展望をもつことができるようにすることが不可欠である。その上で、この「数学的な見方・考え方」に関する指導について、実際に学校種の壁を超えて議論することが重要であると考える。

以上より、本稿におけるプログラム開発の指針として次の二つを設ける。

A）教師が「数学的な見方・考え方」を豊かにすること（特に、「鍵概念」を視点としてもつこと）

B)「数学的な見方・考え方」に関する指導について学校種の壁を超えて議論すること

2.2　プログラムの概要

2.2.1　全体の構成

前項の二つの指針を踏まえ、現職教員を対象としたプログラムを次の３部構成で開発した。

第１部は、プログラムの趣旨や「数学的な見方・考え方」の概念的な理解を促すための全体説明である。主として2.1に記した内容を概説することとした。第２部は、「鍵概念」を視点とする「数学的な見方」を豊かにすることを意図した四つのセッションである。特に今回はこの「鍵概念」として比例または線形性を選択した。第１のセッションは「学校数学における比例／線形性」、第２のセッションは「代数学における比例／線形性」、第３のセッションは「幾何学における比例／線形性」、第４のセッションは「解析学における比例／線形性」である。第３部は、第１部と第２部を踏まえた参加者同士による教材や学習指導などに関する議論である。一連のプログラムは１日で実施された。

2.2.2　第２部における各セッションの概要

（１）学校数学における比例／線形性

学校数学における比例／線形性として、小学校及び中学校における比例についての単元の他に、小学校算数科から高等学校数学科の多様な単元において時に潜在的になっている比例／線形性を紹介した。具体的には、小学校算数科ついては量の加法性[4]と比例的推論[5]、比例的推論を用いた乗法の計算などを取り上げた。中学校数学科については、円周角に関する性質を取り上げた（図１）。高等学校数学科については、アポロニウスの円や弧度法、定積分の線形性などを取り上げた。

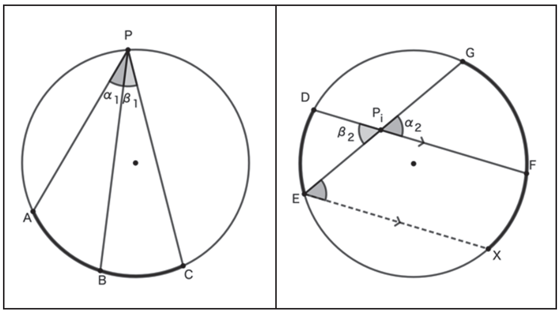

図１　円周角に関する比例／線形性

円周角の大きさは対応する孤長に比例している。角の頂点が円周上にない場合、例えば右図のように円の内部にある場合には、角の大きさは角を構成する２直線に切られる二つの弧長の和に比例している（和田, 2007）。外部にある場合は省略。

（２）代数学における比例／線形性

代数学の基礎として、線形代数に関して、直線 $y = ax$ 上の全ての点の集合を例にベクトル空間について説明した。また、比の考え方の拡がりとして、線形写像とその表現行列及びベクトルの線形結合による表現を解説し、これと連立方程式との関係を説明し

4　物体 x の量を $M(x)$ で表すと、$M(x)+M(y)=M(x+y)$ となる性質。ただし、物体同士の加法はその量に応じて定義される。

5　二つの伴って変わる量Ａ，Ｂに対し、Ａが k 倍になるときＢも k 倍になると考える推論。またはその考えを問題解決に用いる推論。

た。具体的には、同次方程式の解を用いて一般解を求める線形代数の方法を用いて、連立方程式の解法を説明した。さらに、加法性を条件に含んだ線形写像の意味について解説し、線形写像を用いることの利点を説明した。続いて、座標が基底を用いて比の考え方で定まることに触れ、座標平面上の基底の変換を具体的に説明することを通して、表現行列の対角化について説明した。最後に、さらなる展望として、倍数はある整数の比の全体であることからイデアルについて触れ、整数の素因数分解との関連を簡単に説明した。

（3）幾何学における比例／線形性

直線を数直線として捉える際に、基準となるベクトルと、同一直線上にある他の点の位置ベクトルの比を実数と対応させていることを確認した。また、異なる原点と単位ベクトルの組を用いた際に生じる座標変換について説明した。そしてこれらのことをもとに、原点や座標があらかじめ指定されていない直線（アフィン直線）を、数直線をもとに定義することについて概説した。続いて、図形の相似を、相似変換を用いて説明した。具体的には、平面上の変換 f について、2点 P,Q の間のユークリッド距離 $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ とそれらの像 $f(\mathrm{P}),f(\mathrm{Q})$ の距離 $d(f(\mathrm{P}),f(\mathrm{Q}))$ の比が P,Q によらず一定であるとき、すなわち、ある定数 $k\in\mathbb{R}$ について、

$$d(f(\mathrm{P}),f(\mathrm{Q}))=k\cdot d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$$

が成り立つときに、f を相似変換と呼び、相似変換で移りあう図形を互いに相似な図形として説明し、特に $k=1$ のときは、f を等長変換と呼び、図形の関係を合同と呼ぶことを説明した。また、$0<k<1$ のとき f を縮小写像と呼び、平面が完備なときに、ある点 A で $f(A)=A$ となるものが存在し、この点を相似の中心と呼ぶことを説明した。最後に、曲線の曲がり具合を説明する概念として曲率について説明した。具体的には、平面曲線を点の移動によって捉え、その変化の割合として速度ベクトルを説明し、そして大きさ1に正規化した速度ベクトルの変化の割合として、曲率を説明した。

（4）解析学における比例／線形性

線形性を備えた数学的対象であるベクトル空間、特に無限次元のものを解析的に扱う分野が関数解析と呼ばれるものである。まず、関数解析の導入としてベクトル空間、ノルム空間、ノルムと距離関数の関係を説明した。続いて、点列の収束、Cauchy 列を定義し、ノルム空間の完備性及び、Banach 空間を定義した。そして、完備ではないノルム空間を完備化して Banach 空間を構成できることを説明した。次に、Young の不等式から区間 $[0,1]$ 上の連続関数の空間において Hölder の不等式と Minkovski の不等式を証明し、この上の L^p ノルムを定義した。さらに、$[0,1]$ 上の連続関数の空間の L^p ノルムに関する完備化として $[0,1]$ 上の L^p 空間を定義した。そして p の大きさと L^p 空間の包含関係を説明した。

3．プログラムの評価

3.1　分析の方法

3.1.1　プログラムへの参加者

プログラムには、4名の小学校教員（1名の教職大学院生を含む）と4名の中学校教員、1名の教職大学院生が参加した。このうち、2名の小学校教員と2名の中学校教員がプログラムの全てに参加した。

3.1.2　分析の対象と方法

プログラムを評価するための分析の対象は、参加者が回答したアンケートである。アンケートに記載された項目は次のとおりである（図2）。

図2　アンケートの項目（表現を一部変更）

(1) 本日の第1部から第2部（大学教員からの情報提供）を受け、以下の①②について得られたものがあれば、①と②を分けてご記入ください。
① 授業構想の視点
② 比例という数学的概念についての捉え方
(2) 本日の第3部において、小学校・中学校の教員の合同で検討したことによって得られたものがあればご記入ください。
(3) 上記（1)、(2) 以外のことについて、本会にご参加いただいたご感想をご記入ください。

これらの項目から、(A) 参加者が「数学的な見方・考え方」を豊かにすること（特に、「鍵概念」を視点としてもつこと）に寄与したかどうか、(B)「数学的な見方・考え方」に関する指導について学校種の壁を超えた知見が得られたかどうかの2点を分析し、総合的に評価する。分析対象とする回答は、プログラムの全てに参加した4名の参加者によるものとする。

3.2　分析結果

3.2.1 「数学的な見方・考え方」を豊かにすること

小学校教員からは、本プログラムで焦点化した比例／線形性に関するセッションの内容の難しさについてのコメントが得られた。その一方で、セッションの内容を小学校算数科の学習内容と関連づけて解釈している様子も見られた。例えば、加法性を条件に含んだ線形写像の意味やそのような線形写像を用いることの利点についての説明に対し、「そのアイデアは、これまでの私が授業で大切にしてきた『既習を生かす』ということにつながります。」というコメントがあった。線形写像そのものを算数の学習に使うという意味ではなく、よく知っているものや扱いやすいものに帰着して考えるという、数学において基本となる態度面での関連づけであることが読み取れる。また、感想として、「今回の講義を受けて、感じたことは、比例という考え？概念？を使って、定義されているものが結構あるのかもしれない・・・ということであった。これは、比例という数学概念を使って新しい知識や技能を生み出したり、認めたりする、創造力につながるものではないかと感じた。」というものもあった。比例／線形性そのものについての理解は十分得られなかったものの、この数学的概念を視点とした数学の展望については、得るものがあったと解釈できる。

他方、中学校教員のコメントからは、比例／線形性を視点に数学的内容を捉えている姿が窺えた。例えば、「円周角の定理における比例関係の話題が大変興味深かったです。第２部の比例と一次関数の違いをベクトル空間で考える捉え方がこれまでにない視点で有意義でした。」というコメントや、小学校算数科における加法性と比例的推論の関係、高等学校数学科におけるベクトルや行列に言及した上で「意識していないだけで、様々な分野で存在していることもわかり、広義的な『比例』に触れることができた」というコメントが得られた。また、「講義の内容を十分に理解できたわけではありませんが、内容の理解よりも生徒に指導する数学の内容は、もっともっと奥が深く、探求しがいのあるものだということを教師が実感するには十分すぎる内容だったと思います。」というコメントもあった。

3.2.2 「数学的な見方・考え方」に関する指導についての知見

小学校教員と中学校教員の協働による教材等についての議論に対して、その機会の希少性についてのコメントが小学校教員と中学校教員のそれぞれから得られた。特に、「指導要領や教科書を見て、どのように小学校では指導しているのか、文面上だけでなく、実際の指導されてる先生の具体的なお話を聞くことができてよかった。」というコメントもあり、協働による議論の意義の実感が読み取れる。また、比例／線形性に焦点化したことについて、「比例という話題は小学校・中学校で情報交換しやすい内容でした。検討した内容のほとんどが小中学校９年間を見通した数学の指導に生かされるものだったと思います。」というコメントもあった。

一方で、議論の内容は比例的推論に関係するものが中心であった。例えば「小学校においても、中学校においても、比例の意味について子どもたちは難なく理解するようですが、それをどのように活用するのか（現実の世界、数学の世界のどちらにおいても）、という点に課題があると感じました。その要因として、議論のなかにもあった、『比例を前提とする、比例と仮定する』ことへの意識をもたせられていないこと、そのアイデアの良さを実感させられていないことが大きいのだと思います。」というコメントや、「特に、今回の検討で、数学の事象と日常生活の事象の両方を取り扱いながら指導することの意義を感じることができました。解説に示されている図[6]そのものに対する理解はありましたが、比例という具体的な指導場面を想定しながら検討できたことが大変有意義だったと思います。」というコメントから、比例的推論による考察過程やその指導方法についての印象の強さが窺える。このことについては、「授業において、『もし比例していると考えると…』といった発言を子どもから引き出せるような教材を作っていきたいと思いました。」というコメントのように、指導方法に踏み込んだコメントも見られた。

6　「算数・数学の学習過程のイメージ」だと思われる。日常の事象に対して数学を用いて考察する過程と、数学の事象を考察する過程が図示されている。

3.3　プログラムの評価

上記の分析から、参加者は比例／線形性を視点とする学校数学と学問としての数学の展望をそれぞれの数学的熟達性に応じて得ることができ、また、比例／線形性を視点とする義務教育段階における「数学的な見方・考え方」に関する指導についても、何らかの知見を得ることができたと言える。特に後者については、異なる学校段階に共通して登場する数学的内容である比例／線形性を視点としてもったことや、異なる学校段階の教員が協働で教材研究をしたことが有効に働いたと言える。

一方、主として次の二つの項目については、プログラムの内容や進め方について再検討が必要であると思われる。

第一に、参加者の数学的熟達性に応じて内容を構成することである。特に小学校教員は、大学で数学を学習しなくても免許を取得することができるため、高等学校数学科における「数学Ⅰ」の内容が最後に学んだ数学的内容である場合がある。本プログラムにおける各セッションの内容は、それぞれの領域における入門的な内容が中心的であったものの、現在の教職課程を前提とするのであれば、数学的熟達性の差異にさらなる配慮をする必要がある。または、「令和３年答申」を実現するための教員養成を行うために、小学校教員志望学生に対しても、より高度な数学的熟達性の発達を求めていく必要がある。

第二に、本プログラムで焦点化した比例／線形性に関する議論において、比例的推論に関する意見に偏重していたことである。小学校算数科では、関数そのものの学習よりも関数を用いた学習、いわゆる「関数の考え」[7]の学習に主眼が置かれている。また、中学校数学科や高等学校数学科では関数そのものについての学習が広く展開されているものの、旧来より目標論に位置づいてきた「数学的な考え方」を指導するために、中学校以降も「関数の考え」の学習を積極的に取り入れることが多く主張されている。このような主眼や主張は資質・能力の育成を目標に掲げる現在の算数・数学教育と軌を一にするものである。しかしながら、比例的推論には２変量間の比例に着目したり、それらの関係を比例とみなしたりすること以外にも、その関係や仮定を用いて問題解決する過程も含まれており、「数学的な見方」に焦点化した議論が十分に行われないことが起こりうる。例えば、プログラムの第２部で提示した例以外に、学校数学の内容のどこに比例／線形性が確認できるかといったことや、それらを含めたカリキュラムはどのように構成できるかといったことは今回の議論では議題にならなかった。これらの議題は直接的に学習者に指導する方法に関するものではないものの、長期的な展望をもって学習者の「数学的な見方・考え方」を豊かにしていく上では重要な課題である。また、このことについての議論では、教師の豊かな「数学的な見方」が発揮されることが望まれるものである。今回は議論を積極的に方向づけることはしなかったが、「数学的な見方」に相当する比例に着目したり比例とみなしたりする過程と、「数学的な考え方」に相当する問題解決の過程それぞれに焦点化した議題を設けることによって、より広い展望をもった豊かな議論を実現できる可能性がある。

４．まとめと今後の課題

本稿では、学習者の数学的に考える資質・能力を長期的な展望をもって育成できるような教師の専門性を向上する現職教員研修プログラムを開発することが目的であった。そのために、重要な目標概念である「数学的な見方・考え方」を捉え直し、特に「数学的な見方」として着目する概念を汎用性のある比例／線形性に焦点化した上で、数学者と数学教育学者が協働で実施するプログラムを開発・実施し、その有効性を参加者によるアンケートへの回答から評価した。その結果、このプログラムの有効性は認められたものの、参加者の数学的熟達性への配慮や、参加者同士による議論を方向づけることの必要性が示唆された。

本稿ではプログラムの評価をアンケートへの回答のみから行ったが、本来の目的である教師の専門性の向上については十分な評価ができていない。この専門性は、実際の授業の構想や実施の状況をもとに判断するべきものである。このような実践的な評価は今後の課題とする。

7　２変量の関係を関数と捉えて問題解決する方法。関数を比例に限定していない点で、比例的推論を一般化したものと言える。

文献等

中央教育審議会答申：

・「令和の日本型学校教育」の構築を目指して：全ての子供たちの可能性を引き出す、個別最適な学びと、協働的な学びの実現（答申）（令和３年１月26日／中教審 第228号）
https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/079/sonota/1412985_00002.htm

・ 幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策について（答申）（平成28年12月21日／中教審 第197号）
https://www.mext.go.jp/component/b_menu/shingi/toushin/__icsFiles/afieldfile/2014/07/22/1346335_02.pdf

Devlin, K.（1994）. *Mathematics: The science of patterns.* New York: Scientific American Library.

育成すべき資質・能力を踏まえた教育目標・内容と評価の在り方に関する検討会：論点整理（平成26年３月31日）
https://www.mext.go.jp/component/b_menu/shingi/toushin/__icsFiles/afieldfile/2014/07/22/1346335_02.pdf

文部省（1993）『小学校算数指導資料　新しい学力観に立つ算数科の学習指導の創造』. 大日本図書.

文部科学省（2018a）.『小学校学習指導要領（平成29年告示）解説　算数編』. 日本文教出版.

文部科学省（2018b）.『中学校学習指導要領（平成29年告示）解説　数学編』. 日本文教出版.

文部科学省（2019）.『高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説　数学編』. 学校図書 .

中島健三（2015）.『復刻版　算数・数学教育と数学的な考え方：その進展のための考察』. 金子書房.

奈須正裕・江間史郎・鶴田清司・齊藤一弥・丹沢哲郎・池田真（2015）.『教科の本質から迫るコンピテンシー・ベイスの授業づくり』. 図書文化.

OECD（2004）、国立教育政策研究所（監訳）（2005）.『PISA2003年調査　評価の枠組み：OECD 生徒の学習到達度調査』. ぎょうせい.

OECD（2013）、国立教育政策研究所（監訳）（2016）.『PISA2012年調査　評価の枠組み：OECD 生徒の学習到達度調査』. 明石書店.

Steen, L. A.（Ed.）. *On the shoulder of the giants: New approaches to numeracy.* Washington, D. C.: National Academy Press.

杉山吉茂（2010）.『復刻　公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』. 東洋館出版社.

和田義信（2007）. 第３章　数学教育の現代化の時代」. 和田義信著作・講演集刊行会編『和田義信　著作・講演集２　論文集（軽装版）』（pp.237-310）. 東洋間出版社.

付記

本研究は宮城教育大学における「令和３年度『教員養成大学ならではの学校教育・教員養成に関する研究への重点支援研究経費』」の支援を受けて実施している。また、アンケート結果を分析し個人が特定できない形で公表することについては、プログラムの参加者から承諾を得ている。

（令和３年９月30日受理）

A Study on Consistent Instruction of Competencies to Think Mathematically in Compulsory Education Stage:

Development and Evaluation of In-service Teacher Training Program

HANAZONO Hayato, ICHIKAWA Hiraku, KAMADA Hiroyuki,
SATO Tokushi and TAYA Hisao

Abstract

Mathematics teachers at the compulsory education stage are required to develop the competencies of students to think mathematically with a nine-year perspective. It is an urgent task for teacher training universities to train teachers who have expertise in making instructional plans and developing teaching materials with a long-term perspective, and to develop in-service teacher training programs to develop such expertise.

The purpose of this study is to develop a training program for improving the expertise of mathematics teachers that will enable them to provide consistent instruction in the competencies to think mathematically at the compulsory education level. To do so, we implemented the program developed based on the report of the Central Council for Education and other relevant documents, and empirically evaluated its effectiveness by analyzing the questionnaires answered by the participants. As a result, it was confirmed that it is effective to have a viewpoint of mathematical contents commonly appearing in different school stages and to have teachers from different school stages collaborate in developing teaching materials. On the other hand, it was found that the understanding of such mathematical contents varied depending on the mathematical proficiency of the participants, and it was confirmed that it was necessary to devise a program according to the mathematical proficiency of the participants.

Key words： Mathematics education, In-service teacher training, Pre-service teacher training, Competencies to think mathematically, Compulsory Education