

# ガードナーの「魔法の行列」を用いた 数当てマジックについて

—数学的活動の題材として—

\*鎌 田 博 行

## 要 旨

小学校・中学校・高等学校、および大学における数学的活動の題材となり得るガードナーの「魔法の行列」を用いた数当てマジックを紹介する。

**Key words**： 数学的活動、演算法則、記数法、置換、行列、行列式

## 1 はじめに

高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説数学編（2019）では、数学 A の内容「(3) 数学と人間の活動」において、「数学史的な話題、数理的なゲームやパズルなどを通して、数学と文化の理解を深めるとともに、パズルなどに数学的な要素を見だし、目的に応じて数学を活用して考察すること」とある。本稿では、小学校算数科，中学校数学科，高等学校数学科における数学的活動の題材となり得ると思われる以下の数当てマジックをとりあげ、関連する大学での授業実践や現職教員向けの講習会の内容の一部を紹介し、その数学的背景に対する行列・行列式の初歩を用いた説明を与える。

## 2 数当てマジック

まず児童・生徒・学生に各自「ひみつの数」を 1 つ考えてもらう。児童・生徒・学生から 1 名を指名し、指名した人の「ひみつの数」を（授業者以外で）共有してもらう。

例えば、「ひみつの数」を「32」とする。

次のカード（以下、サイズ  $4 \times 4$  の標準的な台紙とい

う）を用いて「ひみつの数」を当てる：

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

(2.1)

### 手順

- (1) この標準的な台紙の中の数から 1 つ選んで○で囲んでもらい、その数の上下左右の数を斜線で見え消しにして、先に考えた「ひみつの数」と○で囲んだ数の和を求めてもらう。  
ただし、以下、○が付いたカードおよび数は授業者に見せず（答えず）に隠しておいてもらう。  
例えば、カードの中から最初に「8」を選ぶと、

1	2	3	<del>4</del>
<del>5</del>	<del>6</del>	<del>7</del>	⑧
9	10	11	<del>12</del>
13	14	15	<del>16</del>

となり、和は  $32 + 8 = 40$  となる。

- (2) 台紙上で○も斜線も書かれていないまだ残っている数から 1 つ選び○で囲んでもらい、その数の上下左右の数を斜線で見え消しにしてもらう。

\* 宮城教育大学 教科内容学域 理数・生活科学部門（幾何学）

(1) の和に今新たに○を付けた数を加えて和を各自求めてもらう。

例えば、「8」に続いて「15」を選んだとすると、

1	2	<del>3</del>	<del>4</del>
<del>5</del>	<del>6</del>	<del>7</del>	⑧
9	10	<del>11</del>	<del>12</del>
<del>13</del>	<del>14</del>	⑮	<del>16</del>

となり、和は  $40 + 15 = 55$  となる。

- (3) 台紙上で○も斜線も書かれていないまだ残っている数から1つ選び○で囲んでもらい、その数の上下左右の数を斜線で見え消しにしてもらう。

先と同様に、(2) の和に新たに○を付けた数を加えて和を求めてもらう。

例えば、「8, 15」に続いて「1」を選ぶと、

①	<del>2</del>	<del>3</del>	<del>4</del>
<del>5</del>	<del>6</del>	<del>7</del>	⑧
<del>9</del>	10	<del>11</del>	<del>12</del>
<del>13</del>	<del>14</del>	⑮	<del>16</del>

和は  $55 + 1 = 56$  である。

- (4) 最後に○も斜線も書かれていないまだ台紙上に残っている数を○で囲んでもらい（こうして得られた台紙に○の付いたカードを「ひみつのカード」という）。

(3) の和に最後に○で囲んだ数を加え、和（最後の和という）を求める。

例えば、「8, 15, 1」を選んだとすると、残っている数は「10」だけなので、

①	<del>2</del>	<del>3</del>	<del>4</del>
<del>5</del>	<del>6</del>	<del>7</del>	⑧
<del>9</del>	⑩	<del>11</del>	<del>12</del>
<del>13</del>	<del>14</del>	⑮	<del>16</del>

となり、最後の和は  $56 + 10 = 66$  である。

あとは、その人が最後に求めた和（最後の和）を答えてもらい、その「最後の和」のみから「ひみつの数」を当てみせるという数当てマジックである。

例の場合は、授業者が知り得るのは **66** のみであり、これから「ひみつの数」である「32」を当てるというわけである。この例の場合をまとめると次のような計算をしたことになる：

例 2.1 「ひみつの数」を「32」とするとき、「ひみつのカード」が「8, 15, 1, 10」の順に○で囲まれてできた

とすると、

①	<del>2</del>	<del>3</del>	<del>4</del>
<del>5</del>	<del>6</del>	<del>7</del>	⑧
<del>9</del>	⑩	<del>11</del>	<del>12</del>
<del>13</del>	<del>14</del>	⑮	<del>16</del>

$$\begin{aligned} (1) \quad & \underline{32} + 8 = 40 \\ (2) \quad & 40 + 15 = 55 \\ (3) \quad & 55 + 1 = 56 \\ (4) \quad & 56 + 10 = 66 \end{aligned}$$

ただし、実際の数当てマジックでは、最後の和 **66** 以外の数 32 と○で囲った数「8, 15, 1, 10」は「ひみつ」である。

例 2.2 「ひみつの数」は同じく「32」とする。「2, 5, 12, 15」の順に○で囲ったとすると、以下の「ひみつのカード」を得る：

<del>1</del>	②	<del>3</del>	<del>4</del>
⑤	<del>6</del>	<del>7</del>	<del>8</del>
<del>9</del>	<del>10</del>	<del>11</del>	⑫
<del>13</del>	<del>14</del>	⑮	<del>16</del>

$$\begin{aligned} (1) \quad & \underline{32} + 2 = 34 \\ (2) \quad & 34 + 5 = 39 \\ (3) \quad & 39 + 12 = 51 \\ (4) \quad & 51 + 15 = 66 \end{aligned}$$

よって

$$(((\underline{32} + 2) + 5) + 12) + 15 = 66$$

を得る。ただし、実際には最後の和 **66** 以外の数（ひみつの数「32」と○で囲まれた数「2, 5, 12, 15」）はひみつである。

小学校算数における数学的活動としては、「ひみつのカード」の作成手順を明示してもよいかもしれない。いろいろな例を通じて、同じ「ひみつの数」に対しては、作成手順が違っていてもでき上がった「ひみつのカード」が同一ならば、「最後の和」が同じになることに気づかせ、3つ以上の数のたし算の性質を確認する。例えば、一つ目の例では、

$$(((\underline{32} + 8) + 15) + 1) + 10 = 66$$

であるが、たし算がカッコの付け方によらないこと（加法の結合法則）から

$$\underline{32} + (8 + 15 + 1 + 10) = 66$$

であり、さらに、たし算の順番を入れ替えてもよいこと（加法の交換法則）から

$$\underline{32} + (1 + 8 + 10 + 15) = 66$$

となることを確認する（二つ目の例や他の例も同様）。

ところで、今紹介した2つの例では、同一の「ひみつの数」(32)に対して「最後の和」はいずれも **66** で一致した。そこで次の問が考えられる：

問 2.3 2つの例で「最後の和」が一致したのは偶然か必然か？すなわち、同一の「ひみつの数」に対して「最後の和」はいつでも一致するか？もし必然ならばどのような理由によるのか？

「ひみつの数」の部分をも  $\square$  (あるいは文字  $x$ ) で置き換えることにより、

$$\begin{aligned} & (((\square + 8) + 15) + 1) + 10 \\ &= \square + (8 + 15 + 1 + 10) \\ &= \square + (1 + 8 + 10 + 15) \\ &= \square + 34 \\ & (((\square + 2) + 5) + 12) + 15 \\ &= \square + (2 + 5 + 12 + 15) \\ &= \square + 34 \end{aligned}$$

となることから、2つの例には共通の数「34」が現れることを観察できる。よって、先の問は次のように言い換えられる：

問 2.4 サイズ  $4 \times 4$  の標準的な台紙から作った「ひみつのカード」に対して、「ひみつのカード」の○のついた4つの数の全部の和は、「ひみつのカード」によらずに一定（今の場合 34）であると言ってよいのか？

この問は、マーチン・ガードナー（1979）の著書中の「魔法の行列」（pp. 66-67）において扱われ<sup>\*1</sup>、インターネットや YouTube（例えば、Talwalkar, 2015; 横山, 2019）でも紹介されている。

問 2.4 に関する授業中の活動としては、もう少しいろいろな例を観察してもよい。実際には、「ひみつのカード」の種類は全部で  $4! = 24$  種類なので、すべての種類の「ひみつのカード」について、○のついた数の和を調べればこの問の答えはわかる。クラスの児童・生徒を、各場合を2名以上から成るペアまたはグループが担当するように割り振って、24通り全ての場合について協働で確かめさせてもよいかもしれない。

しかしながら、単に「全数調査」しただけでは、なぜそうなるのか理由（カラクリ）が見えてこない、このような場合、条件をいろいろと変えたり、他の台紙について成り立つかどうかを考える必要がある。例えば、違うサイズについてどうなるか観察してみると、 $2 \times 2$  と  $3 \times 3$  の標準的な台紙は次で与えられ、それぞれ  $2! = 2$  種類と  $3! = 6$  種類の「ひみつのカード」について、○の付いた数の和が一定であることが、以下

のように直接確かめられる。

例 2.5 サイズ  $2 \times 2$  の場合:

1	2
3	4

(標準的な台紙)

①	2
3	④

$1 + 4 = 5$

1	②
③	4

$2 + 3 = 5$

よってサイズ  $2 \times 2$  の場合は、○の付け方によらず和は5で一定である。

例 2.6 サイズ  $3 \times 3$  の場合:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(標準的な台紙)

に対して、「ひみつのカード」は  $3! = 6$  通りあるが、

$$\begin{aligned} 1 + 5 + 9 &= 1 + 6 + 8 = 15 \\ 2 + 6 + 7 &= 2 + 4 + 9 = 15 \\ 3 + 4 + 8 &= 3 + 5 + 7 = 15 \end{aligned}$$

であるから、やはり○のつけかたによらず和は15で一定である。

例 2.7 サイズ  $5 \times 5$  の場合:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

(標準的な台紙)

であり、「ひみつのカード」は  $5! = 120$  通りある。例えば、

①	2	3	4	5
6	⑦	8	9	10
11	12	⑬	14	15
16	17	18	⑲	20
21	22	23	24	⑳

$1 + 7 + 13 + 19 + 25 = 65$

1	②	3	4	5
6	7	8	⑨	10
⑪	12	13	14	15
16	17	18	19	⑳
21	22	㉓	24	25

$2 + 9 + 11 + 20 + 23 = 65$

<sup>\*1</sup> 追記の文献（ガードナー, 1960, 1982, 2015）も参照。

1	2	3	④	5
⑥	7	8	9	10
11	12	⑬	14	15
16	17	18	19	⑳
21	㉒	23	24	25

$4 + 6 + 22 + 20 + 13 = 65$

のように、ここに挙げた例ではサイズ  $5 \times 5$  の「ひみつのカード」で○のついた数の和は 65 で一定である。

**予想 2.8** 一般に、サイズ  $n \times n$  の「標準的な台紙」から作られる「ひみつのカード」に対して、○の付いた数の和は（○の付け方によらず）一定であろう。

### 3 観察

標準的な台紙について、例えば以下の性質が観察される。

**観察 3.1** 標準的な台紙の中から幾つかの行と列を抜き出して得られる「長方形」の四隅の数の対角和は等しい。例えば、

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline \end{array}$$

から 2, 3 行目と 1, 2, 3 列目を取り出して得られる「長方形」の四隅の数の対角和はどちらも 16 である：

5	6	7
9	10	11

 $\rightsquigarrow 5 + 11 = 7 + 9 (= 16).$ 

1, 4 行目と 2, 4 列目を取り出して得られる「長方形」については

2	3	4
6	7	8
10	11	12
14	15	16

 $\rightsquigarrow 2 + 16 = 4 + 14 (= 18)$ 

が成り立つ。

別のサイズの台紙では、例えば、サイズ  $5 \times 5$  の標準的な台紙

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

から 3, 4 行目と 2, 3 列目を取り出して得られる「長方形」（この場合「正方形」）については、

12	13
17	18

 $\rightsquigarrow 12 + 18 = 13 + 17 (= 30)$ 

が成り立つ。

**観察 3.2** 標準的な台紙の中からある行とある列を取り除いて「正方形」を作るとき、その「正方形」を台紙として同様の「数当てマジック」ができる。

例えば、サイズ  $4 \times 4$  の標準的な台紙から、2 行目と 2 列目を取り除いてサイズ  $3 \times 3$  の台紙を作る：

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

 $\rightsquigarrow$ 

1	3	4
9	11	12
13	15	16

このとき、次が成り立つ：

$$\begin{aligned} 1 + 11 + 16 &= 3 + 12 + 13 = 4 + 9 + 15 \\ &= 1 + 12 + 15 = 3 + 9 + 16 \\ &= 4 + 11 + 13 (= 28) \end{aligned}$$

**観察 3.3** 標準的な台紙の中からある行とある列を取り除いて「正方形」を作り、その「正方形」を台紙とし「ひみつのカード」を作る。例えば、観察 3.2 の台紙

1	3	4
9	11	12
13	15	16

から作られる  $3! = 6$  枚の「ひみつのカード」について、各カードの○のついている数の積に適当に符号をつけて加えると 0 となる。実際、6 枚の「ひみつのカード」は

①	3	4
9	⑪	12
13	15	⑯

①	3	4
9	11	⑫
13	⑮	16

1	③	4
9	11	⑫
⑬	15	16

1	③	4
⑨	11	12
13	15	⑯

1	3	④
⑨	11	12
13	⑮	16

1	3	④
9	⑪	12
⑬	15	16

であり、次が成り立つ：

$$\begin{aligned} &1 \cdot 11 \cdot 16 - 1 \cdot 12 \cdot 15 + 3 \cdot 12 \cdot 13 \\ &\quad - 3 \cdot 9 \cdot 16 + 4 \cdot 9 \cdot 15 - 4 \cdot 11 \cdot 13 \\ &= 176 - 180 + 468 - 432 + 540 - 572 \\ &= 0 \end{aligned}$$

**観察 3.4** もし予想 2.8 が成り立つとすると、標準的な台紙の行や列を入れ替えたりしても○のついた数の和は一定のはずである。したがって、例えば、サイズ  $5 \times 5$  の標準的な台紙の 1 行目と 3 行目を入れ替えたあとで、2 列目と 5 列目を入れ替えて得られる新しい台紙

11	15	13	14	12
6	10	8	9	7
1	5	3	4	2
16	20	18	19	17
21	25	23	24	22

について、

11	15	⑬	14	12
6	10	8	9	⑦
①	5	3	4	2
16	20	18	⑲	17
21	②⑤	23	24	22

$$13 + 7 + 1 + 19 + 25 = 65$$

⑪	15	13	14	12
6	10	8	⑨	7
1	5	3	4	②
16	②①	18	19	17
21	25	②③	24	22

$$11 + 9 + 2 + 20 + 23 = 65$$

となり和が等しいことが観察される。

また、本節で観察した性質が行や列を入れ替えた台紙についても成り立つことがわかる。

予想 2.8 を数式で表現して一般的に扱うために以下の用語を準備しておく：

**用語**  $n^2$  個の数  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) を正方形上に並べてできる表をサイズ  $n \times n$  の台紙という。サイズ  $n \times n$  の台紙は  $n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  と同一視される。

$a_{11}$	$a_{12}$	$\cdots$	$a_{1n}$
$a_{21}$	$a_{22}$	$\cdots$	$a_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_{n1}$	$a_{n2}$	$\cdots$	$a_{nn}$

$$\begin{aligned} &\leftrightarrow A = (a_{ij}) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

特に、 $1, 2, \dots, n^2$  に対して、

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, a_{12} = 2, \dots, a_{1n} = n, \\ a_{21} &= n+1, a_{22} = n+2, \dots, a_{2n} = 2n, \\ &\dots, a_{n1} = n(n-1)+1, \\ a_{n2} &= n(n-1)+2, \dots, a_{nn} = n^2 \end{aligned}$$

として定まる台紙  $A = (a_{ij})$  をサイズ  $n \times n$  の標準的な台紙という。

## 4 定和について

本節では、予想 2.8 が成り立つという「仮説」のもとで、一般のサイズ  $n \times n$  の標準的な台紙から、前節で説明した要領で作った「ひみつのカード」の中の○のついている数の和について考察する。

**問 4.1** 予想 2.8 が成り立つとして、サイズ  $n \times n$  の標準的な台紙から作られる「ひみつのカード」の○の付いた数の総和（定和） $S_n$  をいろいろな方法で求めてみよ。

この問題は、 $n = 3, 4, \dots, 10$  など、具体的な  $n$  に対しては、小学校、中学校、あるいは高等学校の数学 A で、一般の  $n$  に対しては高等学校数学 B の数列以降で扱うことができるであろう。

ただし、もし「仮説」が正しくなければ、「仮説」に基づいて得られたいかなる結果も、真偽不明になってしまうことに注意する。

**解答例 1** 対角線に着目し対角線に並ぶ数を  $\{d_k\}_{k=1,2,\dots,n}$  とすると、数列  $\{d_k\}$  は初項 1、末項  $n^2$  の等差数列（公差は  $(n+1)$ ）であり、項数は  $n$  個なので、それらの和  $S_n$  について次を得る：

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n d_k = 1 + (n+2) + \cdots + n^2 \\ &= \frac{n(1+n^2)}{2} \end{aligned}$$

( $d_k = 1 + (n+1)(k-1)$ ) である。

実際、 $n = 2, 3, 4, 5$  とすれば、

$$S_2 = 5, \quad S_3 = 15, \quad S_4 = 34, \quad S_5 = 65$$

が確認できる。□

**解答例 2** 台紙  $A = (a_{ij})$  において、 $[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$  を主対角線といい、主対角線を 1 つずつ（右に）ずら

したものを汎対角線という：

$$[a_{12}, a_{23}, \dots, a_{n-1,n}, a_{n1}],$$

$$[a_{13}, a_{24}, \dots, a_{n-2,n}, a_{n-1,1}, a_{n2}],$$

$\dots,$

$$[a_{1,n-1}, a_{2n}, a_{31}, a_{42}, \dots, a_{n,n-2}],$$

$$[a_{1n}, a_{21}, a_{32}, \dots, a_{n,n-1}]$$

主対角線上の数と  $(n-1)$  本の汎対角線上の数について、それらの総和は台紙上の数全部の和となる ( $n=3$  の場合、以下の例を参照)。したがって、 $n$  本の (主, 汎) 対角線の和がそれぞれ皆  $S_n$  に等しいことを認めれば定和  $S_n$  が求められる。主対角線の代わりに、反対角線  $[a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}]$  とそれを 1 つずつずらした汎反対角線を用いても同様である：

$$\begin{aligned} nS_n &= 1 + 2 + \dots + n^2 \\ \therefore S_n &= \frac{n(n^2 + 1)}{2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

例 4.2 ( $3 \times 3$  の場合)

(i) [対角線と汎対角線に分割]:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \textcircled{1} & 2 & 3 \\ \hline 4 & \textcircled{5} & 6 \\ \hline 7 & 8 & \textcircled{9} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \textcircled{2} & 3 \\ \hline 4 & 5 & \textcircled{6} \\ \hline \textcircled{7} & 8 & 9 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \textcircled{3} \\ \hline \textcircled{4} & 5 & 6 \\ \hline 7 & \textcircled{8} & 9 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \hline \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} \\ \hline \textcircled{7} & \textcircled{8} & \textcircled{9} \\ \hline \end{array}$$

(ii) [反対角線と汎反対角線に分割]:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \textcircled{3} \\ \hline 4 & \textcircled{5} & 6 \\ \hline \textcircled{7} & 8 & 9 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \textcircled{2} & 3 \\ \hline \textcircled{4} & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & \textcircled{9} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \textcircled{1} & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \textcircled{6} \\ \hline 7 & \textcircled{8} & 9 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \hline \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} \\ \hline \textcircled{7} & \textcircled{8} & \textcircled{9} \\ \hline \end{array}$$

**解答例 3** 台紙  $A = (a_{ij})$  から作られる  $n!$  枚の「ひみつのカード」を積み重ねて「 $n!$  階建て」にしたときに、この建物を上から見ると、各  $(k, l)$  成分において、 $\bigcirc$  のついた  $a_{kl}$  が  $(n-1)!$  個重なって現れる。

したがって、「仮説」のもとで、標準的な台紙から作られるこの建物の  $\bigcirc$  の付いている数の総和は、

$$\begin{aligned} n!S_n &= (n-1)!(1 + 2 + \dots + n^2) \\ \therefore S_n &= \frac{n(n^2 + 1)}{2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。

例 4.3 ( $3 \times 3$  の場合)

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \textcircled{1} & 2 & 3 \\ \hline 4 & \textcircled{5} & 6 \\ \hline 7 & 8 & \textcircled{9} \\ \hline \end{array} \quad (1 \text{ 階}) + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \textcircled{1} & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \textcircled{6} \\ \hline 7 & \textcircled{8} & 9 \\ \hline \end{array} \quad (2 \text{ 階})$$

$$+ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \textcircled{2} & 3 \\ \hline 4 & 5 & \textcircled{6} \\ \hline \textcircled{7} & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \quad (3 \text{ 階}) + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \textcircled{2} & 3 \\ \hline \textcircled{4} & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & \textcircled{9} \\ \hline \end{array} \quad (4 \text{ 階})$$

$$+ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \textcircled{3} \\ \hline \textcircled{4} & 5 & 6 \\ \hline 7 & \textcircled{8} & 9 \\ \hline \end{array} \quad (5 \text{ 階}) + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \textcircled{3} \\ \hline 4 & \textcircled{5} & 6 \\ \hline \textcircled{7} & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \quad (6 \text{ 階})$$

$$\begin{aligned} 3!S_3 &= 2!(1 + 2 + 3 + \dots + 3^2) = 2 \times 45 \\ \therefore S_3 &= 15 \end{aligned}$$

## 5 定式化

一般のサイズの台紙に対して問題を定式化する。

**用語**  $\{1, 2, \dots, n\}$  から自分自身への全単射を  $\{1, 2, \dots, n\}$  の置換といい、その全体を  $\mathfrak{S}_n$  と表す。置換  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$  に対して、写像の合成  $\tau \circ \sigma$  は

$$\tau \circ \sigma(k) = \tau(\sigma(k)) \quad (k \in \{1, 2, \dots, n\})$$

で定義され、以下  $\tau \circ \sigma$  を簡単に  $\tau\sigma$  と表す。ここで、 $\mathfrak{S}_n$  は写像の合成を積として群をなす ( $n$  次対称群と呼ばれる)。通常、 $\{1, 2, \dots, n\}$  上の置換  $\sigma$  は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

と表される。

さて、一般のサイズ  $n \times n$  の台紙とその台紙の数を  $\bigcirc$  で囲って作成した「ひみつのカード」について、

(1) サイズ  $n \times n$  の台紙

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ \hline \end{array}$$

を  $n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  と同一視する。このとき、

(2) 「ひみつのカード」は  $\{1, 2, \dots, n\}$  上の置換と同一視される。



実際、(2)については、「ひみつのカード」の「 $k$  行目に着目したときに○の付いている数の場所が第  $l$  列である」なら、 $\sigma(k) = l$  とすると、作り方から「ひみつのカード」の各列で○の付いた数は 1 つなので、

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\} = \{1, 2, \dots, n\}$$

である。よって、「ひみつのカード」の○の位置から、 $\{1, 2, \dots, n\}$  上の置換  $\sigma$  が定まり、逆も成り立つ。

**定理 5.1** サイズ  $n \times n$  の標準的な台紙  $A = (a_{ij})$  について、次が成り立つ：

$$\sum_{k=1}^n a_{k\sigma(k)} = \sum_{k=1}^n a_{kk} \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n) \quad (5.1)$$

**定理 5.1 の証明 1** まず、サイズ  $n \times n$  の標準的な台紙の各数から 1 を減じて得られる「新しい台紙」を考える。すなわち、標準的な台紙が  $A = (a_{ij})$  であるとき、「新しい台紙」は  $A^{\text{new}} = (a_{ij} - 1)$  である。

一般に台紙  $A = (a_{ij})$  が定理 5.1 の性質 (5.1) を満たせば、「新しい台紙」 $A^{\text{new}} = (a_{ij} - 1)$  も同じ性質 (5.1) を満たし、逆も成り立つことに注意する。

標準的な台紙から得られる「新しい台紙」の  $n^2$  個の成分  $0, \dots, n^2 - 1$  を全て  $n$  進法表記すると、「新しい台紙」から作られる「ひみつのカード」については、○の付いた数の和が一定となることが容易にわかる（以下の例を参照）。□

**例 5.2** ( $10 \times 10$  のとき)

以下の「ひみつのカード」の場合

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

$$\begin{aligned} & 02 + 17 + 21 + 33 + 46 + 55 + 68 + 70 + 89 + 94 \\ &= (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \times 10 \\ &+ (2 + 7 + 1 + 3 + 6 + 5 + 8 + 0 + 9 + 4) \\ &= (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \times 11 \\ &= (495) \end{aligned}$$

となる。他の「ひみつのカード」についても、○の付いた数の十の位、一の位のいずれにも

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  がちょうど 1 回ずつあらわれるので、その和は一定値 495 となる。

**例 5.3** ( $5 \times 5$  の場合)

0	①	2	3	4
5	6	7	⑧	9
⑩	11	12	13	14
15	16	17	18	⑬
20	21	⑫	23	24

(十進法表記)

00	01	02	03	04	01
10	11	12	13	14	13
20	21	22	23	24	20
30	31	32	33	34	34
40	41	42	43	44	42

(五進法表記)

$$\begin{aligned} & 01 + 13 + 20 + 34 + 42 \text{ (五進法表記)} \\ &= (0 + 1 + 2 + 3 + 4) \times 5 \\ &+ (1 + 3 + 0 + 4 + 2) \\ &= 10(5 + 1) = 60 \text{ (十進法表記)}. \end{aligned}$$

**定理 5.1 の証明 2** 標準的な台紙  $A = (a_{ij})$  について、

$$a_{ij} = n(i - 1) + j \quad (1 \leq i, j \leq n) \quad (5.2)$$

より、次を得る：

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{k\sigma(k)} &= \sum_{k=1}^n \{n(k - 1) + \sigma(k)\} \\ &= n \sum_{k=1}^n (k - 1) + \sum_{k=1}^n \sigma(k) \\ &= n \sum_{k=1}^n (k - 1) + \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n^2(n - 1)}{2} + \frac{n(n + 1)}{2} \\ &= \frac{n(n^2 + 1)}{2}. \end{aligned}$$

和は確かに  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に無関係である。□

**定理 5.1 の証明 3** まず、観察 3.1 でみたように、標準的な台紙  $A = (a_{ij})$  については、

$$a_{ij} + a_{kl} = a_{il} + a_{kj}$$

が成り立つことに注意する。実際、 $a_{il} = a_{ij} + (l - j)$ 、 $a_{kl} = a_{kj} + (l - j)$  より、

$$a_{ij} + a_{kl} = a_{il} - (l - j) + a_{kj} + (l - j) = a_{il} + a_{kj}$$

となる。このとき、「ひみつのカード」の○の付いている数の和は、置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  を用いて

$$\sum_{k=1}^n a_{k\sigma(k)}$$

と表される。今、「ひみつのカード」の  $a_{11}$  に○がついていないとする。このとき、 $\sigma(1) = j_1$  とし、 $\sigma(k) = 1$  となる  $k$  を  $k = i_1$  とおくと、1 行目の○の位置が第  $j_1 (> 1)$  列であり、1 列目の○の位置が第  $i_1 (> 1)$  行であって、

$$a_{1j_1} + a_{i_11} = a_{11} + a_{i_1j_1}$$

が成り立つ。よって、最初の「ひみつのカード」から○の位置を、1 行目の○の位置は第 1 列にあり、 $i_1$  行目の○の位置が第  $j_1$  列にあるものに置き換えたとしても、○の付いた数の和は

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n a_{k\sigma(k)} \\ &= a_{1\sigma(1)} + a_{i_1\sigma(i_1)} + \sum_{k \neq 1, i_1} a_{k\sigma(k)} \\ &= (a_{1j_1} + a_{i_11}) + \sum_{k \neq 1, i_1} a_{k\sigma(k)} \\ &= (a_{11} + a_{i_1j_1}) + \sum_{k \neq 1, i_1} a_{k\sigma(k)} \end{aligned}$$

となって保たれる。以下同様にして、最初の「ひみつのカード」から対角線上の数  $a_{11}, a_{22}, \dots$  に○が付いたものに置き換えていくことができ、最終的には対角線上に並んだ数に○が付いた「ひみつのカード」が得られるが、各段階で○のついた和は変化しないので (5.1) が得られる。□

#### 例 5.4

1	②	3	4	5
6	7	8	⑨	10
⑪	12	13	14	15
16	17	18	19	⑳
21	22	㉓	24	25

$$2 + 9 + 11 + 20 + 23$$

①	2	3	4	5
6	7	8	⑨	10
11	⑫	13	14	15
16	17	18	19	⑳
21	22	㉓	24	25

$$= 1 + 9 + 12 + 20 + 23$$

$$= 1 + 9 + 12 + 20 + 23$$

①	2	3	4	5
6	⑦	8	9	10
11	12	13	⑭	15
16	17	18	19	⑳
21	22	㉓	24	25

$$= 1 + 7 + 14 + 20 + 23$$

$$= 1 + 7 + 14 + 20 + 23$$

①	2	3	4	5
6	⑦	8	9	10
11	12	⑬	14	15
16	17	18	19	㉒
21	22	23	㉔	25

$$= 1 + 7 + 13 + 20 + 24$$

$$= 1 + 7 + 13 + 20 + 24$$

①	2	3	4	5
6	⑦	8	9	10
11	12	⑬	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	㉕

$$= 1 + 7 + 13 + 19 + 25$$

となり、最初の「ひみつのカード」の○が付いている数の和が、対角線上に並ぶ数の和に等しいことが示された。

注 5.5 一般の台紙  $A = (a_{ij})$  に対しては、次が成り立つ：

$$\sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{i,i+k-1} \right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}$$

ただし、 $i+k-1 > n$  のときは添え字の  $i+k-1$  を  $\text{mod } n$  で考える。実際、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{i,i+k-1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,i+k-1} \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^{n-i} a_{i,i+k} + \sum_{k=n-i+1}^n a_{i,i+k-n} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=i+1}^n a_{ij} + \sum_{j=1}^i a_{ij} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \end{aligned}$$

これより標準的な台紙に対する (4.1) がしたがう。

また、

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left( \sum_{k=1}^n a_{k\sigma(k)} \right) = (n-1)! \sum_{k,l=1}^n a_{kl}$$



が成り立つ。実際、

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left( \sum_{k=1}^n a_{k\sigma(k)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{k\sigma(k)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n; \\ \sigma(k)=l}} a_{kl} \\ &= (n-1)! \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \end{aligned}$$

である。最後の等式は、 $k, l$  を固定したときに、 $\sigma(k) = l$  を満たす置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  の個数が  $(n-1)!$  であることからしたがう。特に、標準的な台紙に対して (4.2) が成り立つ。

## 6 特徴づけ

**観察 6.1** 標準的な台紙 ( $4 \times 4$  の場合) は、次のように「加法表」として作られている：

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline \end{array}$$

$$\leftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline + & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline \end{array}$$

つまり、加法表の上部に現れる数  $1, 2, 3, 4$  と左側に現れる  $0, 4, 8, 12$  の 8 つの数の和として得られることに注意すると、「ひみつのカード」の 1 行目にある○で囲まれた数は、 $1, 2, 3, 4$  のうちのどれか 1 つと  $0$  の和であり、2 行目にある○で囲まれた数は  $1, 2, 3, 4$  のうち 1 行目で選んだものの以外の数と  $4$  の和である。さらに、3 行目にある○で囲まれた数は  $1, 2, 3, 4$  のうち 1 行目と 2 行目で選んだものの以外の数と  $8$  の和であり、最後の 4 行目にある○で囲まれた数は、 $1, 2, 3, 4$  のうち選ばれずに残った数と  $12$  の和である。したがって、そのカードで○の付いている数の総和は、 $1, 2, 3, 4$  と  $0, 4, 8, 12$  の和、すなわち

$$1 + 2 + 3 + 4 + 0 + 4 + 8 + 12 = 34$$

となる。このことから予想 2.8 が正しかったこと（つまり定理 5.1 の成立）が分かる。

一般に

**観察 6.2** サイズ  $n \times n$  の台紙  $A = (a_{ij})$  が次の「加法表」で与えられるときは、(5.1) が成り立つ：

$$A = (a_{ij}) \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline + & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \hline b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \hline \end{array}$$

すなわち、

$$a_{ij} = b_i + c_j \quad (6.1)$$

( $1 \leq i, j \leq n$ ) のとき、(5.1) が成り立つ。実際、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{k\sigma(k)} &= \sum_{k=1}^n (b_k + c_{\sigma(k)}) \\ &= \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n c_{\sigma(k)} \\ &= \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n c_k \\ &= \sum_{k=1}^n (b_k + c_k) = \sum_{k=1}^n a_{kk} \end{aligned}$$

である。

以上より、台紙  $A = (a_{ij})$  に対する条件 (6.1) は (5.1) が成り立つための十分条件であることがわかった。ここで、 $a_{ij} = b_i + c_j$  という表示は一意的でないことに注意する。

特に、 $A = (a_{ij})$  が標準的な台紙のときは、

$$a_{ij} = b_i + c_j, \quad b_i = n(i-1), \quad c_j = j$$

と表されるので、既に観たように、(5.1) が成り立つ。

また、明らかに次が成り立つ：

**観察 6.3** サイズ  $n \times n$  の台紙  $A = (a_{ij})$  が (6.1) を満たすならば、

$$a_{ij} + a_{kl} = a_{il} + a_{kj} \quad (6.2)$$

( $1 \leq i, j, k, l \leq n$ ) が成り立つ。実際、

$$\begin{aligned} a_{ij} + a_{kl} &= (b_i + c_j) + (b_k + c_l) \\ &= (b_i + c_l) + (b_k + c_j) \\ &= a_{il} + a_{kj}. \end{aligned}$$

である。

観察 6.2 で見たような「加法表」から作られる台紙を用いれば、標準的な台紙と同様にして「数当てマジック」ができる。それでは逆に、どのような台紙であれば、同様の「数当てマジック」ができるだろうか？

問 6.4 サイズ  $n \times n$  の台紙  $A = (a_{ij})$  に対して, (5.1)

$$\sum_{k=1}^n a_{k\sigma(k)} = \sum_{k=1}^n a_{kk} \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n)$$

を満たすような台紙  $A = (a_{ij})$  を特徴づけよ。

本節では、これまでの観察に基づいて、「数当てマジック」に使える台紙の特徴づけを与える。

台紙  $A = (a_{ij})$  に対して (5.1) が成り立つためには, (6.1) が必要であることは次の定理からわかる:

定理 6.5 サイズ  $n \times n$  の台紙  $A = (a_{ij})$  に対して,

$$\sum_{k=1}^n a_{k\sigma(k)} = \sum_{k=1}^n a_{kk} \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n) \quad (5.1)$$

が成り立つとき,  $A = (a_{ij})$  は次の形に一意的に表すことができる:

$$a_{ij} = \frac{a}{n} + b_i + c_j \quad (1 \leq i, j \leq n) \quad (6.3)$$

ただし,  $b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $c_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) は

$$\sum_{i=1}^n b_i = \sum_{j=1}^n c_j = 0$$

を満たすものとする。

補題 6.6 サイズ  $n \times n$  の台紙  $A = (a_{ij})$  について, 任意の  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して (5.1) が成り立つとき, (6.2) が成り立つ。

補題の証明  $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$  を固定する。 $i = k$  または  $j = l$  の場合は明らかに (6.2) が成り立つので, 以下,  $i \neq k$  かつ  $j \neq l$  と仮定してよい。このとき, 置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  として  $\sigma(i) = j$ ,  $\sigma(k) = l$  となるものを取り, さらに, 2 文字  $j$  と  $l$  のみを入れ替える置換 (互換) を  $\tau$  とする。すなわち,  $\tau(j) = l$ ,  $\tau(l) = j$ ,  $\tau(h) = h$  ( $h \neq j, l$ ) とすると,  $h \neq i, k$  のとき,  $\sigma(h) \neq j, l$  であるから,

$$\begin{aligned} \tau\sigma(h) &:= \tau(\sigma(h)) = \sigma(h) \quad (h \neq i, k), \\ \tau\sigma(i) &= l, \quad \tau\sigma(k) = j \end{aligned}$$

が成り立つ。このとき, (5.1) より,

$$\sum_{h=1}^n a_{h\tau\sigma(h)} = \sum_{h=1}^n a_{hh} = \sum_{h=1}^n a_{h\sigma(h)}$$

であるから,  $a_{il} + a_{kj} = a_{ij} + a_{kl}$  がしたがう。□

定理 6.5 の証明

(表示可能性): サイズ  $n \times n$  の台紙  $A = (a_{ij})$  が (5.1) を満たすとする, 先の補題より, (6.2) が成り立つ。このとき,  $k, l = 1, 2, \dots, n$  として (6.2) の両辺の和をとると

$$\sum_{k,l=1}^n (a_{ij} + a_{kl}) = \sum_{k,l=1}^n (a_{il} + a_{kj})$$

より

$$n^2 a_{ij} + \sum_{k,l=1}^n a_{kl} = n \left( \sum_{l=1}^n a_{il} + \sum_{k=1}^n a_{kj} \right)$$

すなわち,

$$n a_{ij} + \frac{1}{n} \sum_{k,l=1}^n a_{kl} = \sum_{l=1}^n a_{il} + \sum_{k=1}^n a_{kj} \quad (6.4)$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} a &:= \frac{1}{n} \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \\ b_i &:= \frac{1}{n} \left( \sum_{l=1}^n a_{il} - a \right), \\ c_j &:= \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n a_{kj} - a \right) \end{aligned}$$

とおけば,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n b_i &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i,l=1}^n a_{il} - na \right) = 0 \\ \sum_{j=1}^n c_j &= \frac{1}{n} \left( \sum_{k,j=1}^n a_{kj} - na \right) = 0 \end{aligned}$$

であり, これらを用いて

$$a_{ij} = \frac{a}{n} + b_i + c_j$$

と表すことができる。(□)

(一意性):  $A = (a_{ij})$  の成分  $a_{ij}$  が

$$a_{ij} = \frac{a}{n} + b_i + c_j = \frac{a'}{n} + b'_i + c'_j \quad (6.5)$$

$$\sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n b'_i = 0, \quad \sum_{j=1}^n c_j = \sum_{j=1}^n c'_j = 0$$

と表されたとすると,  $i = j = k$  として  $k = 1, 2, \dots, n$  について和をとることにより,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A &= \sum_{k=1}^n a_{kk} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{a}{n} + b_k + c_k \right) \\ &= a + \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n c_k = a \end{aligned}$$

を得る。同様にして,  $\operatorname{tr} A = a'$  を得るので,

$$a = a' = \operatorname{tr} A$$

となる。このとき, (6.5) より  $b_i + c_j = b'_i + c'_j$  となり,

$$b_i - b'_i = c'_j - c_j \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

が成り立つ。この式を  $i$  について和をとると

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n b_i - \sum_{i=1}^n b'_i = \sum_{i=1}^n (b_i - b'_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (c'_j - c_j) = n(c'_j - c_j) \end{aligned}$$

であり,  $j$  について和をとると

$$\begin{aligned} n(b_i - b'_i) &= \sum_{j=1}^n (b_i - b'_i) = \sum_{j=1}^n (c'_j - c_j) \\ &= \sum_{j=1}^n c'_j - \sum_{j=1}^n c_j = 0 \end{aligned}$$

であるから,

$$b_i = b'_i, \quad c_j = c'_j \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

を得る。□

**注 6.7** 前節の解答 3 と同様にすれば, (6.2) が常に成り立つような台紙  $A = (a_{ij})$  に対しては, (5.1) が成り立つことを直接確かめることができる。

ところで, より一般に, サイズ  $m \times n$  の長方形の台紙 (すなわち,  $m \times n$  行列)  $A = (a_{ij})$  についても次が成り立つ (証明は同様):

**定理 6.8** サイズ  $m \times n$  の台紙  $A = (a_{ij})$  に対して次は同値である:

- $a_{ij} + a_{kl} = a_{il} + a_{kj}$   
( $1 \leq i, k \leq m; 1 \leq j, l \leq n$ )

- ある  $a, b_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ),  $c_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) が存在して,

$$a_{ij} = \frac{a}{mn} + b_i + c_j$$

の形に一意的に表される。ただし

$$\sum_{i=1}^m b_i = \sum_{j=1}^n c_j = 0$$

を満たす。

特に, 台紙  $A = (a_{ij})$  が  $b_1, \dots, b_m$  と  $c_1, \dots, c_n$  から作られる「加法表」から得られるためには,

$$a_{ij} + a_{kl} = a_{il} + a_{kj}$$

( $1 \leq i, k \leq m; 1 \leq j, l \leq n$ ) が成り立つことが必要十分である。

行列に対する演算など線形代数の基礎的な内容を仮定すると, 行列の階数や行列式の性質に関する基本的な内容から, 観察 3.3 で観察した性質が一般のサイズ  $n \times n$  (ただし  $n \geq 3$ ) に対しても成り立つことがわかる。

**系 6.9** サイズ  $n \times n$  (ただし  $n \geq 3$ ) の台紙  $A = (a_{ij})$  が (5.1) を満たすならば, 台紙  $A$  から作ることができる  $n!$  枚の「ひみつのカード」の各カードの○の付いた数の和に, 適当に符号をつけて加えると 0 とすることができる。

**系の証明** まず次の記号を導入する:

**記号**  $n$  次列ベクトル  $\mathbf{1}_n$ ,  $n$  次行ベクトル  $\mathbf{1}_n^*$ , および  $n$  次正方行列  $\mathbf{1}_{n \times n}$  を次で定める:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_n &= (1 \ 1 \ \cdots \ 1)^* = {}^t(1 \ 1 \ \cdots \ 1), \\ \mathbf{1}_n^* &= (1 \ 1 \ \cdots \ 1), \\ \mathbf{1}_{n \times n} &= \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

台紙  $A = (a_{ij})$  が (5.1) を満たすならば, 定理 6.5 より, ある数  $a$  と列ベクトル  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  を用いて

$$A = \frac{a}{n} \mathbf{1}_{n \times n} + \mathbf{b} \mathbf{1}_n^* + \mathbf{1}_n \mathbf{c}^* \quad (6.6)$$

(ただし,  $\mathbf{1}_n^* \mathbf{b} = 0$  かつ  $\mathbf{c}^* \mathbf{1}_n = 0$ ) と一意的に表される。このことから, 任意の  $n$  次列ベクトル  $\mathbf{x}$  に対

して,

$$\begin{aligned} Ax &= \frac{a}{n} \mathbf{1}_n (\mathbf{1}_n^* \mathbf{x}) + \mathbf{b} (\mathbf{1}_n^* \mathbf{x}) + \mathbf{1}_n (\mathbf{c}^* \mathbf{x}) \\ &= \left( \frac{a}{n} \mathbf{1}_n^* \mathbf{x} + \mathbf{c}^* \mathbf{x} \right) \mathbf{1}_n + (\mathbf{1}_n^* \mathbf{x}) \mathbf{b} \\ &\in \text{span}\{\mathbf{1}_n, \mathbf{b}\} \end{aligned}$$

であるから,  $\text{rank } A = \dim \text{Im } A \leq 2$  が成り立つ。  
よって,  $n \geq 3$  のとき,  $\text{rank } A \leq 2 < 3 \leq n$  が成り立つので,

$$\det A = 0$$

がわかる\*2。したがって, 行列  $A = (a_{ij})$  の行列式  $\det A$  の定義より

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$$

が成り立つ (ただし,  $\varepsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$  は置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  の符号を表す)。□

注 6.10  $n = 2$  のときは, 系 6.9 は一般に成り立たない。実際, 標準的な台紙 

1	2
3	4

 について  $1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$  である。

## 7 おわりに

本稿で紹介した数当てマジックは, 現職教員向けの講習 (例えば, 免許状更新講習 (鎌田, 2017), 平成 31 年度の本学における重点支援研究 (代表: 市川啓) で企画された小学校現職教員に対する数学的活動の体験型講習会) や, 著者の所属大学の主に小学校教員を目指す学生が 1 年次に履修する数学の授業 (通称「小専

数学」) と教養科目の数学の授業, 教職大学院における算数・数学の授業開発に関する授業等において取り上げ実演し, いろいろなサイズの標準的な台紙を用いて定理 5.1 が成り立つことを確かめたり, 定理の成立を仮定して定和を求める方法や定理が成り立つ理由を考えてもらった\*3。

授業等で扱い始めた最初のうちは, サイズ  $4 \times 4$  の標準的な台紙からはじめ, より簡単なサイズ  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  を観察したり, 次のサイズ  $5 \times 5$  を観察してもらった後で, サイズ  $10 \times 10$  の標準的な台紙の各数から 1 を減じた台紙を観察してもらい\*4, このことを踏まえて, 他のサイズの場合にどうすればよいか考えるよう促し, ある段階で適当な  $n$  進法表記を用いるとよいという説明 (証明 1) を主にしていた。しかしながら, 観察 6.1 のように標準的な台紙の各数が 2 数の和として構成された「加法表」として捉える方が\*5 定理 5.1 が成り立つことの本質を捉えているため, 最近では最後のタネあかしとして「加法表」による説明をしている。

ところで, より一般に, サイズ  $m \times n$  の長方形の台紙  $A = (a_{ij})$  について, 観察 3.1 に類似する性質

$$a_{ij} + a_{kl} = a_{il} + a_{kj}$$

( $1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$ ) が成り立つとき, もし各数  $a_{ij}$  が整数 (自然数) であれば, 4 つの数の和は

$$a_{ij} + a_{il} + a_{kj} + a_{kl} = 2(a_{ij} + a_{kl})$$

となり偶数であることがわかる。特に, 自然数を 1 から  $mn$  までを順に並べたサイズ  $m \times n$  の標準的な台紙

\*2 このことは, 次のようにしてもわかる: 行列  $A$  の 1 列目の  $(-1)$  倍を 2 列目, 3 列目,  $\dots$ ,  $n$  列目に順次加えると,

$$\begin{aligned} \det A &= \det \left( \left( \frac{a}{n} + c_1 \right) \mathbf{1}_n + \mathbf{b}, \left( \frac{a}{n} + c_2 \right) \mathbf{1}_n + \mathbf{b}, \dots, \left( \frac{a}{n} + c_n \right) \mathbf{1}_n + \mathbf{b} \right) \\ &= \det \left( \left( \frac{a}{n} + c_1 \right) \mathbf{1}_n + \mathbf{b}, (c_2 - c_1) \mathbf{1}_n, \dots, (c_n - c_1) \mathbf{1}_n \right) \\ &= (c_2 - c_1) \cdots (c_n - c_1) \det \left( \left( \frac{a}{n} + c_1 \right) \mathbf{1}_n + \mathbf{b}, \mathbf{1}_n, \dots, \mathbf{1}_n \right) = 0 \quad (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{aligned}$$

\*3 授業等により受講者層が違いため扱う内容の範囲も異なっている。例えば, 小学校現職教員や小学校教員を目指す学生が受講する授業や教養科目の数学の授業等では, 観察 3.3 を除く観察 6.1 までの内容について主に具体例を中心に扱い, 続いて「ひみつのカード」を「魔方陣のタネ」として捉え, 3 次または 4 次の魔方陣の具体的構成の話題につなげた。一方, 中学校・高等学校数学科教員を目指す大学院生向けの授業では, 本稿第 6 節までの内容をほぼ一通り扱った。その中では, 2 変数関数  $f(x, y)$  が  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  のような 1 変数関数の和となるための  $f(x, y)$  の満たすべき条件と (6.2) の類似性にも触れた。

\*4 我々は十進法に慣れているので, 例 5.2 のように, サイズ  $10 \times 10$  の「ひみつのカード」の○の付いている数の和が一定であることは一目瞭然となる。

\*5 現職教員向けの講習会では, 当日講習中の早い段階でこのことに気づいている受講者がいた一方で, 大学の授業では, 定理が成立する理由について, 授業時間中ではうまく説明できない様子がみられたが, 後日提出のレポートでは多くの学生が標準的な台紙を「加法表」と捉えて説明していた (学生本人が考えたのか, 何かを調べたのかは不明)。

(すなわち,  $a_{ij} = n(i-1) + j$  ( $1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$ )) について, 正方形に並ぶ 4 つの数

$a_{ij}$	$a_{i,j+1}$
$a_{i+1,j}$	$a_{i+1,j+1}$

の和  $a_{ij} + a_{i,j+1} + a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1}$  の性質を調べて説明する問題が,  $n = 5, 6$  の場合に令和 3 年度全国学力・学習状況調査の中学校数学の問題 6 に出題されている(文部科学省, 国立教育政策研究所, 2021)。 $n$  が一般の場合も, 例えば  $n$  が奇数のときには和が 4 の倍数であることがわかり,  $n$  が偶数のときは, 4 で割ると 2 余る偶数であることがわかる。 $n, i, j$  の選び方によって様々なバリエーションが考えられよう。

最後に, ガードナー (1979) にも触れてあるように, 本稿で扱った内容のほとんどは, 数の範囲を自然数から整数, 有理数, 実数, 複素数(さらには, 一般の可換代数系)に広げたり, たし算(加法)をかけ算(乗法)におきかえた「かけ算バージョン」が考えられ, 小学校・中学校・高等学校において数学的活動の題材として活用できると思われる。例えば, 中学校 1 年生の教科書(藤井, 真島ほか, 2021, pp.11–12)では, 「九九表を, 縦 2 ます横 2 ますの正方形で囲むと, 斜めの数どうしの積が等しくなる」というきまりについて,  $2 \times 4, 2 \times 5, 3 \times 4, 3 \times 5$  を囲んだ正方形

8	10
12	15

において  $8 \times 15 = 10 \times 12$  であることを例示し, 「ほかのところを囲んで, きまりが成り立つことを??? 確かめてみましょう」「学習をふり返ってまとめをしましょう」「見つけたきまりがいつでも成り立つ理由を考えてみましょう」と続いている。一般に, 観察 3.1 の性質 ( $a_{ij} + a_{kl} = a_{il} + a_{kj}$ ) の「かけ算バージョン」( $a_{ij}a_{kl} = a_{il}a_{kj}$ ) が「九九表(乗法表)」で成り立つ。

## 参考文献

- [1] 藤井齊亮, 真島秀行 ほか (2021), 新しい数学 1, 東京書籍.
- [2] マーチン・ガードナー (1979), 魔法の行列 (pp.66–67), THE PARADOX BOX 逆説の思考(野崎昭弘 監訳), 別冊サイエンス 26, 日経サイエンス社.
- [3] 鎌田博行 (2017), 「授業力向上の視点 –主体的に学ぶ生徒の育成–」配付資料, 岩手県立総合教育センター, 2017 年 8 月 4 日
- [4] 鎌田博行 (2021), 授業で使える(?) 数学の話, 令和 3 年度宮城県高等学校数学教育研究会, 講演(中止)スライド資料.
- [5] 文部科学省 (2018a), 小学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説算数編, 日本文教出版.
- [6] 文部科学省 (2018b), 中学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説数学編, 日本文教出版.
- [7] 文部科学省 (2019), 高等学校学習指導要領(平成 30 年告示)解説数学編理数編, 学校図書.
- [8] 文部科学省, 国立教育政策研究所 (2021), 令和 3 年度全国学力・学習状況調査報告書 児童生徒一人一人の学力・学習状況に応じた学習指導の改善・充実に向けて. <https://www.nier.go.jp/21chousakekkahoukoku/report/data/21mmath.pdf>
- [9] Presh Talwalkar (2015), A  $4 \times 4$  Grid Prediction Math Magic Trick –Sunday Puzzle. <https://mindyourdecisions.com/blog/2015/08/16/a-4x4-grid-prediction-math-magic-trick-sunday-puzzle/#.VdDqqPlVhBc>
- [10] 横山明日希 (2019), 思い浮かべた数字を即、当てます! 「数学マジック」の奥深き世界. 【雑学 14】四つの数字. <https://gendai.ismedia.jp/articles/-/64932?page=2>  
<https://gendai.ismedia.jp/articles/-/64932?page=3>

**追記** 表題の「魔法の行列」に関するガードナーによる以下の文献を追加する。

- [11] M. ガードナー (1960), 現代の娯楽数学, –新しいパズル・マジック・ゲーム– (金沢 養 訳), 2 章 新しい魔方陣 (pp.29–37), 白揚社.
- [12] マーチン・ガードナー (1982), aha! Gotcha ゆかいなパラドックス 1 (竹内郁雄 訳), 第 2 章 数 7 魔法の行列 (pp.108–112), 日経サイエンス.
- [13] マーティン・ガードナー (2015), ガードナーの数学パズル・ゲーム, フレキサゴン・確率パラドックス・ポリオミノ, 完全版マーティン・ガードナー数学ゲーム全集 1 (岩沢 宏和, 上原隆平 監訳), 2 方陣を使ったマジック (pp.21–30), 日本評論社.

なお, 本稿は, コロナ感染症拡大防止のため中止となった令和 3 年度宮城県高等学校数学教育研究会総会における講演予定の内容に対するスライド資料(鎌田, 2021)から該当する部分について改めて加除修正を行い再構成したものである。

# Mathematical magic using Gardner's "magic matrix"

—as materials for mathematical activities—

KAMADA Hiroyuki

## Abstract

We introduce a mathematical magic by using Gardner's "magic matrix," which can be thought as materials for mathematical activities in elementary school, junior high school and high school, together with relevant teaching practices at university.

**Key words :** mathematical activities, laws of arithmetic, numeral system, permutation, matrix, determinant