

選択公理のもたらす論理と直観の乖離について（その2）

—高次元 Banach-Tarski の定理を通して—

*佐藤 得志・**佐藤 雄介

要 旨

現代数学において、選択公理は必要不可欠な重要な公理である。しかし、これを仮定することにより、直観的には受け入れ難い数学的な事実が導かれることがある。3次元以上の Euclid 空間における Banach-Tarski の定理はその代表的な例である。本稿においては、3次元における議論を前提とし、4次元以上の場合に、選択公理を用いることによって Hausdorff の定理が導かれることを中心に、その証明の詳細を解説する。

Key words : 選択公理, Banach-Tarski の定理, Hausdorff の定理, 合同, 有限分割合同

1. 序

数学的事柄の理解においては、論理的な理解とともに、直観的な理解も欠かせないように思われる。しかし、現代数学においては、時として、論理的には正しいのであるが、直観的には理解し難いような数学的事実が存在する。その代表的な例が、[2] でも紹介した3次元 Euclid 空間における Banach-Tarski の定理である。現代数学においては、標準的に、Zermelo-Fraenkel の公理系に選択公理を加えた、いわゆる ZFC 公理系を基にして議論が行われる。

選択公理は、数学的にきちんと表現するとやや難しく見えるかもしれないが、平たく言うと、‘いくつか(無限個の場合を含む)の空でない集合が与えられたとき、それぞれの集合から元を1つずつ(同時に)選び出すことができる’というものである。このこと自体は、直観的に納得できるようなものであると思われる。これを数学的に述べると、次のようになる。

公理 1.1 (選択公理). A を空でない集合とし、集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in A}$ は

$$A_\lambda \neq \emptyset \text{ for all } \lambda \in A$$

をみたすとする、写像 $f: A \rightarrow \bigcup_{\lambda \in A} A_\lambda$ で、

$$f(\lambda) \in A_\lambda \text{ for all } \lambda \in A$$

をみたすものが存在する。(このような写像 f を選択関数と呼ぶ。) \square

この選択公理を仮定することによって得られる数学的に重要な定理はいくつもあり、その意味で選択公理は現代数学において不可欠な公理であると言ってよい。一方で、この選択公理があるがゆえに、Banach-Tarski の定理のような不可解な定理が成り立ってしまうのも事実であり、ここでは論理と直観が掛け離れたような状況に陥る。

Banach-Tarski の定理については、4次元以上の Euclid 空間内でも成り立つことが知られている。しかし、そもそも4次元以上の Euclid 空間というものを2次元や3次元の Euclid 空間と同様に直観的に理解できる人は、(全くいないわけではないのかもしれないが、数学者の中にも) ほとんどいないと言ってよいだろう。それでも、(第一著者を含めて) 一般に N 次元 Euclid 空間の中で議論を行う数学者は世界中に多数存在し、それぞれがそれに関する直観を伴いながら、論理的に議論を展開し、それによって数学の研究が進展していくというのも事実である。4次元以上の Euclid 空間がいかなるものであるかについては、大

* 宮城教育大学 教科内容学域 理数・生活科学部門 (解析学)

** 宮城教育大学大学院 教育学研究科 修士課程 教科教育専攻 数学教育専修

学(学部)での数学でも学習するような線形代数学や多変数関数の微分積分学などから得られる知識を基にして、学習者のそれぞれがそれに関する直観をある程度築くことができるようになるのであろう。但し、そのためには学習者自身がこれをきちんと理解するための努力を行い、その肉付けとなるような数学的経験が必要になるとも思われる。

3次元 Euclid 空間における Banach-Tarski の定理が成り立つことから、4次元以上の Euclid 空間においても同様の事実が成り立つことが導かれるということについては、数学によく馴染んだ人であれば、あまり違和感を覚えるものではないであろう。しかしながら、4次元以上の Euclid 空間に対してある程度の感覚をもつ人が、そこで Banach-Tarski の定理が成り立つということを、その感覚に従って理解しようとする、それはかなり難しいのではないと思われる。その意味で、やはり論理と直観が掛け離れたような状況が現出すると言ってよいであろう。

N を自然数とすると、 N 次元 Euclid 空間における Banach-Tarski の定理について述べるために、 N 次元 Euclid 空間 \mathbf{R}^N の図形の合同と有限分割合同について定義しておく(合同変換の厳密な定義については2節において述べることにする)。ここで、自然数全体の集合を \mathbf{N} で表し、

$$\mathbf{N}_{1,n} = \{i \in \mathbf{N} \mid 1 \leq i \leq n\} = \{1, 2, 3, \dots, n\} \\ (n \in \mathbf{N})$$

と表すことにする。また、 \mathbf{R}^N の冪集合(\mathbf{R}^N の部分集合全体の集合)を $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ で表し、和集合の記号‘ \cup ’は直和(互いに素な和)を表す。

定義 1.1. $A, B \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ とする。

(i) \mathbf{R}^N の合同変換 $\gamma: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ が存在して

$$\gamma(A) = B$$

をみたすとき、 A と B は合同であるといい、 $A \stackrel{N}{\equiv} B$ と表す。

(ii) $n \in \mathbf{N}$ 及び $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}}, \{B_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ が存在して、

$$A = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} A_i, B = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} B_i, \\ A_i \stackrel{N}{\equiv} B_i \quad (i \in \mathbf{N}_{1,n})$$

をみたすとき、 A と B は有限分割合同であるといい、

$$A \stackrel{(N)}{\equiv} B \text{ と表す。}$$

□

更に、次を定義しておく。ここで、 $x = (x_i)_{i \in \mathbf{N}_{1,N}} \in \mathbf{R}^N$ に対し、

$$|x|_N = \left(\sum_{i \in \mathbf{N}_{1,N}} x_i^2 \right)^{1/2} (\in [0, \infty))$$

は x の (Euclid の意味での) norm を表し、 $x, y \in \mathbf{R}^N$ に対し、 $|x - y|_N$ は x と y の間の (Euclid の意味での) 距離を表す。 $a \in \mathbf{R}^N, r \in (0, \infty)$ とするとき、

$$B_r^N = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x|_N < r\} (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N))$$

は N 次元における原点中心、半径 r の開球を表し、

$$B_r^N(a) = a + B_r^N = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x - a|_N < r\} \\ (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N))$$

は N 次元における中心 a 、半径 r の開球を表す。

定義 1.2. $A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ とする。

(i) $a \in A$ が A の内点であるとは、 $r \in (0, \infty)$ が存在して、 $B_r^N(a) \subset A$ をみたすことである。

(ii) A が \mathbf{R}^N の開集合であるとは、任意の $a \in A$ が A の内点となることである。

(iii) A が有界であるとは、 $R \in (0, \infty)$ が存在して、 $A \subset B_R^N$ をみたすことである。 □

選択公理を仮定すると、次が成り立つ。

定理 1.1 (Banach-Tarski の定理). $N \geq 3$ とし、 $A, B \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ とする。

(i) A, B が共に有界かつ内点を含むならば、 $A \stackrel{(N)}{\equiv} B$ が成り立つ。

(ii) A, B が共に空でない有界な開集合ならば、 $A \stackrel{(N)}{\equiv} B$ が成り立つ。 □

特に、次が成り立つ。

系 1.1. $N \geq 3$ とし、 $A, A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ とする。

(i) A は有界かつ内点を含み、 $A \stackrel{N}{\equiv} A_1, A \stackrel{N}{\equiv} A_2$ をみたすならば、 $A \stackrel{(N)}{\equiv} A_1 \cup A_2$ が成り立つ。

(ii) A が空でない有界な開集合かつ $A \stackrel{N}{\equiv} A_1, A \stackrel{N}{\equiv} A_2$ をみたすならば、 $A \stackrel{(N)}{\equiv} A_1 \cup A_2$ が成り立つ。 □

もう少し具体的に、次が成り立つ。

例 1.1. $N \geq 3$ とする。

(i) $a \in \mathbf{R}^N, r_1, r_2 \in (0, \infty)$ とすると、 $B_{r_1}^N(a) \stackrel{(N)}{\equiv}$

$B_{r_2}^N(a)$ が成り立つ.

(ii) $a, a_1, a_2 \in \mathbf{R}^N$, $r \in (0, \infty)$ とすると, $B_r^N(a) \stackrel{(N)}{=} B_r^N(a_1) \cup B_r^N(a_2)$ が成り立つ. \square

例 1.1 のような事実を目の当たりにすると, 一般の N 次元 Euclid 空間においても N 次元 Lebesgue 測度 (N 次元的な体積) が定義されることを鑑みれば, この事実を直観的に受け入れるのは難しいのではないと思われる. しかしながら, Banach-Tarski の定理において有限分割合同性を議論するときには, 分割されたそれぞれの集合は (Lebesgue) 可測ではなく, その N 次元 Lebesgue 測度は定義されない状況になっている.

4 次元以上の Euclid 空間における Banach-Tarski の定理の証明においても, 3 次元の場合と同様に, Hausdorff の定理と呼ばれる単位球面の分割に関する定理が鍵となる. Hausdorff の定理が証明されれば, 4 次元以上のときの Banach-Tarski の定理は 3 次元の場合と同様にして証明することができる.

Hasudorff の定理の証明としてよく知られている方法としては, 単位球面 S^{N-1} の特殊直交群 $SO(\mathbf{R}^N)$ に関する逆説性を, ある 2 つの回転によって生成される $SO(\mathbf{R}^N)$ の部分群が自由群となることを用いて証明する方法で, 3 次元の場合にこの性質を示し, 次元に関する帰納法を用いて 4 次元以上の場合に拡張するものである ([4] 及び (3 次元の場合は) [3] 参照).

一方, 本稿においては, やはり S^{N-1} の $SO(\mathbf{R}^N)$ に関する逆説性に相当する事実を用いて Hausdorff の定理を証明することになるのであるが, 上述のものとは異なる方法を用いる. 3 次元の場合には, [1] によって示されていた方法であり, これについては [2] においても詳述されているが, 回転角 $\pi, \frac{2\pi}{3}$ のある 2 つの回転によって生成される $SO(\mathbf{R}^3)$ の部分群の (適当な) 分割を構成して S^2 の $SO(\mathbf{R}^3)$ に関する逆説性に相当する事実を示し, これによって (3 次元の場合の) Hausdorff の定理を証明する. これを基にして, 次元に関する帰納法によって 4 次元以上の場合を証明することになるが, この部分の証明に関しては, 上述の方法と同様にして証明することができないため, 独自の手法を用いることになる.

本稿においては, 3 次元の場合に [2] で述べられている定理や命題のうち, (3 次元の場合に限らず) 4 次

元以上の場合でも同様の方法で導かれるものについては, その証明は省略することにする.

本稿の内容は, 一昨年度の「数学コース卒業研究演習」においてその主題としたものに基づき, それを発展させた形で (第二著者の) 修士課程の研究主題としたものである.

2. 合同変換

ここでは, $N \in \mathbf{N}$ とし, \mathbf{R}^N における合同変換について述べる. 本稿においては, \mathbf{R}^N の元は横 vector を用いて表すことにする. このとき, \mathbf{R}^N における第 i 成分が 1 の単位 vector を

$$e_{N,i} = (\delta_{i,j})_{j \in \mathbf{N}_{1,N}} \in \mathbf{R}^N \quad (i \in \mathbf{N}_{1,N})$$

とすると, \mathbf{R}^N は $\{e_{N,1}, e_{N,2}, \dots, e_{N,N}\}$ を (標準) 基底とする \mathbf{R} 上の vector 空間である. また, $(0 \in \mathbf{R})$ と区別するために N 次元の零 vector を

$$0_N = (0)_{j \in \mathbf{N}_{1,N}} \in \mathbf{R}^N$$

と表す.

まず, 平行移動を定義する. ここで, \mathbf{R}^N 上の恒等写像を $\iota_N : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ と表すことにする.

定義 2.1. $a \in \mathbf{R}^N$ に対し,

$$\tau_N[a](x) = x - a \quad (x \in \mathbf{R}^N) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}^N$$

によって定まる写像 $\tau_N[a] : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ を \mathbf{R}^N の平行移動という. このとき, \mathbf{R}^N の平行移動全体の集合を

$$T(\mathbf{R}^N) = \{\tau_N[a] : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N \mid a \in \mathbf{R}^N\}$$

と表すことにする. \square

注意 2.1. (i) $\iota_N = \tau_N[0_N] \in T(\mathbf{R}^N)$.

(ii) $\tau_N[a] \circ \tau_N[b] = \tau_N[a+b] \in T(\mathbf{R}^N)$
for $a, b \in \mathbf{R}^N$.

特に, $a \in \mathbf{R}^N$ に対し,

$$\tau_N[a] \circ \tau_N[-a] = \tau_N[-a] \circ \tau_N[a] = \tau_N[0_N] = \iota_N$$

であるから, $\tau_N[a] : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ は全単射であり, $\tau_N[a]^{-1} = \tau_N[-a] \in T(\mathbf{R}^N)$ が成り立つ.

(従って, $T(\mathbf{R}^N)$ は写像の合成に関して群をなす.) \square

次に, \mathbf{R}^N の回転について述べる. \mathbf{R}^N の原点を中心とする回転は \mathbf{R}^N から \mathbf{R}^N への線形写像である.

一般に, $K, N \in \mathbf{N}$ に対し, \mathbf{R}^K から \mathbf{R}^N への線形写像は (実) (N, K) 型行列を用いて表すことができ, 逆に, (N, K) 型行列によって \mathbf{R}^K から \mathbf{R}^N への線形写像を定めることができる. この意味で, \mathbf{R}^K から \mathbf{R}^N への線形写像と (N, K) 型行列を同一視することができるのであるが, これらの全体の集合を $L(\mathbf{R}^K, \mathbf{R}^N)$ で表す. このとき, (N, K) 型の零行列を

$$0_{K,N} \in L(\mathbf{R}^K, \mathbf{R}^N)$$

と表すことにする.

更に, $L(\mathbf{R}^N) = L(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N)$ とおくと, これは \mathbf{R}^N から \mathbf{R}^N への線形写像, または, (実) N 次正方行列全体の集合を表すことになる. このとき, \mathbf{R}^N の恒等写像 $\iota_N: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ は N 次単位行列によって定まる線形写像であり, $\iota_N \in L(\mathbf{R}^N)$ である. また,

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= {}^t(\alpha^t x) \in \mathbf{R}^N, \\ \alpha \circ \beta &= \alpha\beta, \quad \alpha \circ \alpha \circ \cdots \circ \alpha = \alpha^n \in L(\mathbf{R}^N) \\ &\text{for } x \in \mathbf{R}^N, \alpha, \beta \in L(\mathbf{R}^N), n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

(左辺は写像の値及び合成, 右辺は行列の積の意味) と表すことができる. 更に, $\alpha \in L(\mathbf{R}^N)$ に対し, α (を行列とみなしたとき) の行列式を $\det_N(\alpha) \in \mathbf{R}$, α の転置行列を ${}^t\alpha \in L(\mathbf{R}^N)$ と表し, α の逆写像 (あるいは逆行列) が存在するとき, これを $\alpha^{-1} \in L(\mathbf{R}^N)$ と表すことにする.

このとき, \mathbf{R}^N の (原点を中心とする) 回転は次のように定義される.

定義 2.2. $\rho \in L(\mathbf{R}^N)$ が \mathbf{R}^N の (原点を中心とする) 回転であるとは,

$${}^t\rho\rho = \iota_N \quad (\in L(\mathbf{R}^N)), \quad \det_N(\rho) = 1 \quad (\in \mathbf{R})$$

をみたすことである. このとき, \mathbf{R}^N の (原点を中心とする) 回転全体の集合を $SO(\mathbf{R}^N)$ と表す. \square

いま

$$S^{N-1} = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x|_N = 1\} \quad (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N))$$

を (原点を中心とする) 単位球面とする.

注意 2.2. (i) $\iota_N \in SO(\mathbf{R}^N)$.

(ii) $\rho \in SO(\mathbf{R}^N)$ ならば, ρ は (行列として) 正則であり, $\rho^{-1} = {}^t\rho \in SO(\mathbf{R}^N)$ が成り立つ. 更に,

$$|\rho(x)|_N = |{}^t(\rho^t x)|_N = |x|_N \quad \text{for all } x \in \mathbf{R}^N$$

であり, $\rho(S^{N-1}) = S^{N-1}$ が成り立つ.

(iii) $\rho, \sigma \in SO(\mathbf{R}^N)$ ならば, $\rho\sigma \in SO(\mathbf{R}^N)$ である.

(従って, $SO(\mathbf{R}^N)$ は写像の合成 (あるいは行列の積) に関して群をなす.) \square

これらを用いると, \mathbf{R}^N の合同変換は次のように定義される.

定義 2.3. $T(\mathbf{R}^N)$ と $SO(\mathbf{R}^N)$ の有限個の元の合成として表される写像を, \mathbf{R}^N の合同変換という. このとき, \mathbf{R}^N の合同変換全体の集合を $M(\mathbf{R}^N)$ と表すことにする. \square

注意 2.3. 注意 2.1, 注意 2.2 により, $M(\mathbf{R}^N)$ は写像の合成に関して群をなす. \square

更に, 次を定義する.

定義 2.4 $\rho \in L(\mathbf{R}^N)$ に対し,

$$E_N[\rho] = \{x \in \mathbf{R}^N \mid \rho(x) = x\} \quad (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N))$$

とおく. ($1 \in \mathbf{R}$ が ρ の固有値であるとき, $E_N[\rho]$ は ρ の固有値 1 に対応する固有空間を表す.) \square

$N = 3$ のとき, 次が成り立つことに注意する.

注意 2.4 (i) $\hat{\rho} \in SO(\mathbf{R}^3) \setminus \{\iota_3\}$ とすると, 1 は ρ の固有値であり, vector 空間 $E_3[\hat{\rho}]$ は必ず 1 次元となる. 従って, これは原点を通る直線を表し, これが $\hat{\rho}$ の回転軸に相当する. そこで, これを

$$\ell[\hat{\rho}] = E_3[\hat{\rho}] \quad (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$$

と表すことにする.

(ii) 任意の $\hat{\xi} \in S^2$ に対し, $\hat{\sigma}[\hat{\xi}](e_{3,3}) = \hat{\xi}$ をみたす $\hat{\sigma}[\hat{\xi}] \in SO(\mathbf{R}^3)$ が一意的に存在する. \square

いま, 整数全体の集合を \mathbf{Z} で表す.

例 2.1. (i) $\theta \in \mathbf{R}$ に対して

$$\rho_2[\theta] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\in L(\mathbf{R}^2))$$

とおくと, $\rho_2[\theta] \in SO(\mathbf{R}^2)$ であり, これは \mathbf{R}^2 における原点 $0_2 \in \mathbf{R}^2$ を中心とする回転角 θ の回転を表す. (実際には,

$$SO(\mathbf{R}^2) = \{\rho_2[\theta] \in L(\mathbf{R}^2) \mid \theta \in \mathbf{R}\}$$

が成り立つ.)

(ii) $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 3$ とするとき, $\theta \in \mathbf{R}$ に対して

$$\rho_N[\theta] = \begin{pmatrix} \rho_2[\theta] & 0_{N-2,2} \\ 0_{2,N-2} & \iota_{N-2} \end{pmatrix} (\in L(\mathbf{R}^N))$$

とおくと, $\rho_N[\theta] \in SO(\mathbf{R}^N)$ が成り立つ. このとき,

$$E_N[\rho_N[\theta]] = \begin{cases} \mathbf{R}^N & \text{if } \theta \in 2\pi\mathbf{Z}, \\ \{0_2\} \times \mathbf{R}^{N-2} & \text{if } \theta \in \mathbf{R} \setminus (2\pi\mathbf{Z}) \end{cases}$$

であり,

$$\rho_N[\theta]^{-1} = {}^t\rho_N[\theta] = \rho_N[-\theta],$$

$$\rho_N[\theta_1]\rho_N[\theta_2] = \rho_N[\theta_1 + \theta_2] \quad \text{for } \theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}$$

が成り立つ.

(iii) $\theta \in \mathbf{R} \setminus (2\pi\mathbf{Z})$ に対して

$$\hat{\rho}[\theta] = \rho_3[\theta] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\in L(\mathbf{R}^3))$$

とおくと, $\hat{\rho}[\theta] \in SO(\mathbf{R}^3) \setminus \{\iota_3\}$ であり, その回転軸は

$$\begin{aligned} \ell[\hat{\rho}[\theta]] &= E_3[\hat{\rho}[\theta]] = \{0_2\} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}e_{3,3} \\ &= \{te_{3,3} \in \mathbf{R}^3 \mid t \in \mathbf{R}\} (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)) \end{aligned}$$

である. 実際には, $\hat{\rho}[\theta]$ は $\ell[\hat{\rho}[\theta]] = \mathbf{R}e_{3,3}$ を回転軸とする回転角 θ の回転を表す. \square

例 2.2. $\hat{a} \in \mathbf{R}^3, \hat{\xi} \in S^2$ とし,

$$\begin{aligned} \ell[\hat{a}, \hat{\xi}] &= \hat{a} + \mathbf{R}\hat{\xi} = \{\hat{a} + t\hat{\xi} \in \mathbf{R}^3 \mid t \in \mathbf{R}\} \\ &(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)) \end{aligned}$$

を \mathbf{R}^3 内の直線とする. このとき, 注意 2.4 (ii), 例 2.1 (iii) の記号を用い, $\theta \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}[\hat{a}, \hat{\xi}; \theta](\hat{x}) &= \tau_3[-\hat{a}](\hat{\sigma}[\hat{\xi}]\hat{\rho}[\theta]\hat{\sigma}[\hat{\xi}]^{-1}(\tau_3[\hat{a}](\hat{x}))) \\ &(\in \mathbf{R}^3) \quad \text{for } \hat{x} \in \mathbf{R}^3 \end{aligned}$$

とおくと, $\hat{\gamma}[\hat{a}, \hat{\xi}; \theta] \in M(\mathbf{R}^3)$ であり,

$$\hat{\gamma}[\hat{a}, \hat{\xi}; \theta](\hat{x}) = \hat{x} \quad \text{for all } \hat{x} \in \ell[\hat{a}, \hat{\xi}]$$

が成り立つ. 実際には, $\hat{\gamma}[\hat{a}, \hat{\xi}; \theta]$ は $\ell[\hat{a}, \hat{\xi}]$ を回転軸とする回転角 θ の回転を表す. このとき, 例 2.1 (iii) を用いると,

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}[\hat{a}, \hat{\xi}, \theta]^{-1} &= \hat{\gamma}[\hat{a}, \hat{\xi}; -\theta], \\ \hat{\gamma}[\hat{a}, \hat{\xi}; \theta_1] \circ \hat{\gamma}[\hat{a}, \hat{\xi}; \theta_2] &= \hat{\gamma}[\hat{a}, \hat{\xi}; \theta_1 + \theta_2] \\ &\text{for } \theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

が成り立つ. \square

3. 有限分割合同

この節での議論は, 3次元の場合と同様なので, 命

題等の証明については省略する ([2] 参照). まず, $N \in \mathbf{N}$ とし, \mathbf{R}^N における合同と有限分割合同を改めて定義する.

定義 3.1. $A, B \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ とする.

(i) $\gamma \in M(\mathbf{R}^N)$ が存在して

$$\gamma(A) = B$$

をみたすとき, A と B は合同であるといい, $A \stackrel{N}{\equiv} B$ と表す.

(ii) $n \in \mathbf{N}$ 及び $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}}, \{B_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ が存在して,

$$\begin{aligned} A &= \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} A_i, \quad B = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} B_i, \\ A_i &\stackrel{N}{\equiv} B_i \quad (i \in \mathbf{N}_{1,n}) \end{aligned}$$

をみたすとき, A と B は有限分割合同であるといい, $A \stackrel{(N)}{\equiv} B$ と表す. \square

注意 3.1. $A, B, \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ とする.

(i) $A \stackrel{N}{\equiv} B$ ならば, $A \stackrel{(N)}{\equiv} B$ である.

(ii) $A \cap \hat{A} = B \cap \hat{B} = \emptyset, A \stackrel{(N)}{\equiv} B, \hat{A} \stackrel{(N)}{\equiv} \hat{B}$ ならば, $A \sqcup \hat{A} \stackrel{(N)}{\equiv} B \sqcup \hat{B}$ が成り立つ. \square

例 3.1. $a, b \in \mathbf{R}^N$ とすると, $\tau_N[a - b] \in T(\mathbf{R}^N) \subset M(\mathbf{R}^N)$ である.

(i) $r \in (0, \infty)$ とすると,

$$\tau_N[a - b](B_r^N(a)) = B_r^N(b)$$

であるから, $B_r^N(a) \stackrel{N}{\equiv} B_r^N(b)$ が成り立つ.

(ii) $S^{N-1}(a) = a + S^{N-1}$
 $= \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x - a|_N = 1\}$
 $(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N))$

を a を中心とする \mathbf{R}^N の単位球面とすると,

$$\tau_N[a - b](S^{N-1}(a)) = S^{N-1}(b)$$

であるから, $S^{N-1}(a) \stackrel{N}{\equiv} S^{N-1}(b)$ が成り立つ. \square

例 3.2. $B_1^N \stackrel{(N)}{\equiv} B_1^N \setminus \{0_N\}$.

証明. (a) $C_2 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \left| \left(x_1 - \frac{1}{3}, x_2 \right) \right|_2 = \frac{1}{3} \right\} (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^2))$

とおくと, C_2 は \mathbf{R}^2 内の中心 $\frac{1}{3}e_{2,1} = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$, 半

径 $\frac{1}{3}$ の円周であり, $0_2 \in C_2$ をみたす. 更に,

$$C_N = C_2 \times \{0_{N-2}\} (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N))$$

とおくと, C_N は平面 $\mathbf{R}^2 \times \{0_{N-2}\}$ 内の中心 $\frac{1}{3} e_{N,1}$, 半径 $\frac{1}{3}$ の円周であり, $0_N \in C_N$ をみたす.

(b) 例 2.1 (ii) の記号を用いて

$$\gamma_N(x) = \tau_N \left[-\frac{1}{3} e_{N,1} \right] \circ \rho_N[1] \circ \tau_N \left[\frac{1}{3} e_{N,1} \right] (x) \\ \text{for } x \in \mathbf{R}^N$$

とおくと, $\gamma_N \in M(\mathbf{R}^N)$ であり, 注意 2.1 (i), (ii), 例 2.1 (ii) によって

$$\gamma_N^k(x) = \tau_N \left[-\frac{1}{3} e_{N,1} \right] \circ \rho_N[k] \circ \tau_N \left[\frac{1}{3} e_{N,1} \right] (x) \\ \text{for } x \in \mathbf{R}^N \quad (k \in \mathbf{N})$$

が成り立つ. 従って,

$$\gamma_N(C_N) = C_N (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N))$$

かつ

$$\gamma_N^k(0_N) = \frac{1}{3} ((1 - \cos k) e_{N,1} - (\sin k) e_{N,2}) \\ \neq 0_N \quad (k \in \mathbf{N})$$

となるから, $\{\gamma_N^k(0_N)\}_{k \in \mathbf{N}} \subset C_N \setminus \{0_N\}$ が得られ,

$$\gamma_N^{-k}(\xi_N^l(0_N)) = \gamma_N^{l-k}(0_N) \neq 0_N, \\ \gamma_N^k(0_N) \neq \gamma_N^l(0_N) \quad (k < l \in \mathbf{N})$$

が成り立つ.

$$(c) \quad A_1 = \{\gamma_N^k(0_N)\}_{k \in \mathbf{N}}, \\ B_1 = \{\gamma_N^k(0_N)\}_{k \in \mathbf{N}_0} = \{0_N\} \cup A_1, \\ A_2 = B_2 = C_N \setminus B_1$$

とおくと, $\gamma_N(B_1) = A_1$ より, $A_1 \stackrel{N}{=} B_1$ であり,

$$C_N \setminus \{0_N\} = A_1 \sqcup A_2, \quad C_N = B_1 \sqcup B_2$$

であるから, $C_N \setminus \{0_N\} \stackrel{(N)}{=} C_N$ が成り立つ. 従って, 注意 3.1 (ii) により,

$$B_1^N \setminus \{0_N\} = (B_1^N \setminus C_N) \sqcup (C_N \setminus \{0_N\}) \\ \stackrel{(N)}{=} (B_1^N \setminus C_N) \sqcup C_N = B_1^N$$

が得られる. \square

このとき, 次が成り立つ.

命題 3.1. (i) $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ における合同の関係 $\stackrel{N}{=}$ は $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ における同値関係である.

(ii) $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ における有限分割合同の関係 $\stackrel{(N)}{=}$ は $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ における同値関係である. \square

次に, \mathbf{R}^N における回転合同と有限分割回転合同を定義する.

定義 3.2. $A, B \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ とする.

(i) $\rho \in SO(\mathbf{R}^N)$ が存在して

$$\rho(A) = B$$

をみたすとき, A と B は回転合同であるといい, $A \stackrel{N}{=} B$ と表す.

(ii) $n \in \mathbf{N}$ 及び $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}}, \{B_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ が存在して,

$$A = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} A_i, \quad B = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} B_i, \\ A_i \stackrel{N}{=} B_i \quad (i \in \mathbf{N}_{1,n})$$

をみたすとき, A と B は有限分割回転合同であるといい, $A \stackrel{(N)}{=} B$ と表す. \square

注意 3.2. $A, B, \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ とする.

(i) $A \stackrel{N}{=} B$ ならば, $A \stackrel{(N)}{=} B$ である.

(ii) $A \cap \hat{A} = B \cap \hat{B} = \emptyset, A \stackrel{(N)}{=} B, \hat{A} \stackrel{(N)}{=} \hat{B}$ ならば, $A \sqcup \hat{A} \stackrel{(N)}{=} B \sqcup \hat{B}$ が成り立つ.

(iii) $A \stackrel{N}{=} B$ ならば, $A \stackrel{N}{=} B$ であり, $A \stackrel{(N)}{=} B$ ならば, $A \stackrel{(N)}{=} B$ である. \square

命題 3.2. (i) $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ における回転合同の関係 $\stackrel{N}{=}$ は $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ における同値関係である.

(ii) $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ における有限分割回転合同の関係 $\stackrel{(N)}{=}$ は $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ における同値関係である. \square

更に, 次を定義する.

定義 3.3. $V_N : \mathcal{P}(S^{N-1}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ を

$$V_N(D) = \{t\xi \in \mathbf{R}^N \mid \xi \in D, t \in (0, 1)\} \\ (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)) \quad \text{for } D \in \mathcal{P}(S^{N-1})$$

によって定義する. \square

これに関して, 次が成り立つ.

補題 3.1. $D, H \in \mathcal{P}(S^{N-1}), \rho \in SO(\mathbf{R}^N)$ とすると, 次が成り立つ.

(i) $V_N(D) \subset V_N(S^{N-1}) = B_1^N \setminus \{0_N\}$.

(ii) $V_N(D \cap H) = V_N(D) \cap V_N(H), \\ V_N(D \cup H) = V_N(D) \cup V_N(H).$

(iii) $\rho(D) \in \mathcal{P}(S^{N-1}), V_N(\rho(D)) = \rho(V_N(D)). \quad \square$

命題 3.3. $D, H \in \mathcal{P}(S^{N-1})$ が $D \stackrel{(N)}{\equiv_r} H$ をみたすならば, $V_N(D) \stackrel{(N)}{\equiv_r} V_N(H)$ 成り立つ. \square

更に, \mathbf{R}^N における有限分割合同及び有限分割回転合同の性質として, 次のような Bernstein 型定理が成り立つ ((ii) については, $N = 3$ の場合でも [2] において証明が与えられてはいないが, (i) と同様にして証明される).

定理 3.1. $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ とする.

- (i) $A \subset B \subset C$ かつ $A \stackrel{(N)}{\equiv_r} C$ ならば, $A \stackrel{(N)}{\equiv_r} B \stackrel{(N)}{\equiv_r} C$ が成り立つ.
- (ii) $A \subset B \subset C$ かつ $A \stackrel{(N)}{\equiv_r} C$ ならば, $A \stackrel{(N)}{\equiv_r} B \stackrel{(N)}{\equiv_r} C$ が成り立つ. \square

4. 2つの回転によって生成される群

以下, 特に断らない限り, $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 3$ とする. ここでは, Hausdorff の定理を証明するための準備として, 次で定義される2つの回転 φ_N, ψ_N によって生成される $SO(\mathbf{R}^N)$ の部分群 G_N を考える.

定義 4.1. (i) $\hat{\varphi} = \varphi_3, \hat{\psi} = \psi_3 \in L(\mathbf{R}^3)$ を行列

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} = \varphi_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\psi} = \psi_3 &= \hat{\rho} \left[\frac{2\pi}{3} \right] = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

によって定義する.

(ii) $N \geq 4$ のとき, $\varphi_N, \psi_N \in L(\mathbf{R}^N)$ を行列

$$\begin{aligned} \varphi_N &= \begin{pmatrix} \hat{\varphi} & 0_{N-3,3} \\ 0_{3,N-3} & \iota_{N-3} \end{pmatrix}, \\ \psi_N &= \begin{pmatrix} \hat{\psi} & 0_{N-3,3} \\ 0_{3,N-3} & \iota_{N-3} \end{pmatrix} = \rho_N \left[\frac{2\pi}{3} \right] \end{aligned}$$

によって定義する. \square

例 2.1 (ii), (iii) に注意すると, 次が成り立つ.

注意 4.1. (i) $\varphi_N, \psi_N \in SO(\mathbf{R}^N)$ であり,

$$\begin{aligned} \iota_N = \varphi_N^2 = \psi_N^3, \quad \varphi_N^{-1} = \varphi_N, \quad \psi_N^{-1} = \psi_N^2 \\ (\in SO(\mathbf{R}^N)) \end{aligned}$$

が成り立つ.

(ii) $N = 3$ のとき, $\hat{\varphi}, \hat{\psi} (\in SO(\mathbf{R}^3))$ の回転軸は

$$\begin{aligned} \ell[\hat{\varphi}] = E_3[\hat{\varphi}] &= \{(0, t, t) \in \mathbf{R}^3 \mid t \in \mathbf{R}\} \\ &= \mathbf{R}(e_{3,2} + e_{3,3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell[\hat{\psi}] = E_3[\hat{\psi}] &= \{(0, 0, t) \in \mathbf{R}^3 \mid t \in \mathbf{R}\} \\ &= \mathbf{R}e_{3,3} (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)) \end{aligned}$$

と表され, $\hat{\varphi}$ は $\ell[\hat{\varphi}]$ を回転軸とする回転角 π の回転, $\hat{\psi}$ は $\ell[\hat{\psi}]$ を回転軸とする回転角 $\frac{2\pi}{3}$ の回転を表す.

(iii) $N \geq 4$ のとき,

$$\begin{aligned} E_N[\varphi_N] &= \{(0, t, t, s_1, s_2, \dots, s_{N-3}) \in \mathbf{R}^N \mid \\ &\quad t, s_i \in \mathbf{R} \ (i \in \mathbf{N}_{1,N-3})\} \\ &= (\mathbf{R}(e_{3,2} + e_{3,3})) \times \mathbf{R}^{N-3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_N[\psi_N] &= \{(0, 0, t, s_1, s_2, \dots, s_{N-3}) \in \mathbf{R}^N \mid \\ &\quad t, s_i \in \mathbf{R} \ (i \in \mathbf{N}_{1,N-3})\} \\ &= (\mathbf{R}e_{3,3}) \times \mathbf{R}^{N-3} = \{0_2\} \times \mathbf{R}^{N-2} \\ &(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)) \end{aligned}$$

と表される. \square

これを用いて, 次のような回転の集合 (実際には $SO(\mathbf{R}^N)$ の部分群) を定義する.

定義 4.2. $G_N = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{ \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n \in SO(\mathbf{R}^N) \mid$
 $\rho_i \in \{\varphi_N, \psi_N\} \ (i \in \mathbf{N}_{1,n}) \}$
 $(\subset SO(\mathbf{R}^N))$

とおく. \square

注意 4.2. (i) $\iota_N, \varphi_N, \psi_N, \psi_N^{-1} \in G_N$.

(ii) $\rho, \sigma \in G_N \Rightarrow \rho\sigma \in G_N$.

(iii) $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n \in \{\varphi_N, \psi_N, \psi_N^{-1}\}$
 $\Rightarrow \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n \in G_N,$
 $(\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n)^{-1} = \rho_n^{-1} \rho_{n-1}^{-1} \cdots \rho_1^{-1} \in G_N.$

(注意 4.1 (i) と合わせると, G_N は $SO(\mathbf{R}^N)$ の部分群である.)

(iv) $N \geq 4$ のとき, 任意の $\rho \in G_N$ に対し,

$$\rho = \begin{pmatrix} \hat{\rho} & 0_{N-3,3} \\ 0_{3,N-3} & \iota_{N-3} \end{pmatrix}$$

をみたす $\hat{\rho} \in G_3$ が一意的に存在する (特に, $\rho \in G_N \setminus \{\iota_N\}$ ならば, $\hat{\rho} \in G_3 \setminus \{\iota_3\}$ である). このとき,

$$E_N[\rho] = E_3[\hat{\rho}] \times \mathbf{R}^{N-3} (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N))$$

が成り立つ. \square

ここでは, 次のような記号を用いることにする.

定義 4.3. (i) $\psi_{N,i} = \psi_{N,i_1,i_2,\dots,i_k}$
 $= \psi_N^{i_1} \varphi_N \psi_N^{i_2} \varphi_N \cdots \varphi_N \psi_N^{i_k} (\in G_N)$
for $i = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in \{-1, 1\}^k, k \in \mathbf{N}$.
(ii) $\Psi_N = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \{\psi_{N,i} \in G_N \mid i \in \{-1, 1\}^k\}$,
 $\Psi_N^+ = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \{\psi_{N,i} \in G_N \mid i \in \{1\}^k\}$
 $= \{\psi_N \varphi_N \psi_N \varphi_N \cdots \varphi_N \psi_N\}_{k \in \mathbf{N}}$
 $(\in \mathcal{P}(G_N))$. \square

以下において,

$$\begin{aligned} \alpha\Phi &= \{\alpha\rho \in L(\mathbf{R}^N) \mid \rho \in \Phi\}, \\ \Phi\alpha &= \{\rho\alpha \in L(\mathbf{R}^N) \mid \rho \in \Phi\} (\in \mathcal{P}(L(\mathbf{R}^N))) \\ &\text{for } \alpha \in L(\mathbf{R}^N), \Phi \in \mathcal{P}(L(\mathbf{R}^N)) \end{aligned}$$

のような記号を用いることにする. このとき, 次の 2 つの命題が成り立つ. 証明については, $N = 3$ の場合に [2] において述べられているが, $N \geq 4$ の場合については, それを用いることによって容易に得られる.

命題 4.1. (i) $\iota_N \notin \{\varphi_N\} \cup \Psi_N \cup \varphi_N \Psi_N$
 $\cup \Psi_N \varphi_N \cup \varphi_N \Psi_N \varphi_N$.
(ii) $i \in \{-1, 1\}^k, j \in \{-1, 1\}^l, \psi_{N,i} = \psi_{N,j}$
 $\Rightarrow k = l (\in \mathbf{N}), i = j (\in \{-1, 1\}^k)$. \square

命題 4.2. $G_N = \{\iota_N\} \sqcup \{\varphi_N\} \sqcup \Psi_N \sqcup \varphi_N \Psi_N$
 $\sqcup \Psi_N \varphi_N \sqcup \varphi_N \Psi_N \varphi_N$
が成り立つ. \square

いま, 次の集合を定義する.

定義 4.4. $\Phi_N = \{\iota_N\} \cup \varphi_N \Psi_N \cup \Psi_N^+ \varphi_N$
 $\cup \varphi_N (\Psi_N \setminus \Psi_N^+) \varphi_N$
 $(\in \mathcal{P}(G_N))$
とおく. \square

このとき, 群 G_N を Φ_N を用いて次のように分割することができるが, この事実が 5 節で述べる Hausdorff の定理 (I) の証明の鍵となる. 証明については, $N = 3$

の場合に [2] に述べられているが, $N \geq 4$ の場合はそこから容易に得られる.

命題 4.3. $\varphi_N \Psi_N = \psi_N \Phi_N \sqcup \psi_N^{-1} \Phi_N$,
 $G_N = \Phi_N \sqcup \varphi_N \Phi_N = \Phi_N \sqcup \psi_N \Phi_N \sqcup \psi_N^{-1} \Phi_N$
が成り立つ. \square

5. Hausdorff の定理 (I)

Banach-Tarski の定理の証明においては, Hausdorff の定理と呼ばれる球面の分割に関する事実が重要となるが, その証明のために選択公理が本質的に用いられる. 実際には, 次の形で用いることになる.

集合 $X (\neq \emptyset)$ とその上の同値関係 ' \sim ' が与えられたとき, X をその同値類の直和として表すことができるのであるが, 選択公理を用いることにより, より精密に次の形で表されることが分かる (証明については [2] 参照).

命題 5.1. $X (\neq \emptyset)$ を集合とし, ' \sim ' を X 上の同値関係とする. このとき, $Y \in \mathcal{P}(X)$ が存在して,

$$X = \bigsqcup_{y \in Y} [y]$$

が成り立つ. ここで, $[x] (\in \mathcal{P}(X))$ は $x (\in X)$ の同値類である. \square

Hausdorff の定理を述べるために次の集合を定義する.

定義 5.1. $D_N = \bigcup_{\rho \in G_N \setminus \{\iota_N\}} (S^{N-1} \cap E_N[\rho])$
 $(\in \mathcal{P}(S^{N-1}))$
とおく. \square

注意 5.1. (i) $N \geq 4$ のとき, 注意 4.2 (iv) により,

$$\begin{aligned} D_N &= \bigcup_{\hat{\rho} \in G_3 \setminus \{\iota_3\}} (S^{N-1} \cap (E_3[\hat{\rho}] \times \mathbf{R}^{N-3})) \\ &\subset \bigcup_{\hat{\rho} \in G_3 \setminus \{\iota_3\}} (E_3[\hat{\rho}] \times \mathbf{R}^{N-3}) \end{aligned}$$

が成り立つ.

(ii) $E_N[\rho] = -E_N[\rho] (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N))$ for $\rho \in L(\mathbf{R}^N)$ であるから, $D_N = -D_N$ が成り立つ. \square

このとき, 次を証明することができる. この事実も, 直観的には理解し難い事実と言ってよいであろう.

定理 5.1 (Hausdorff の定理 (I)).

$$S^{N-1} = K_N \sqcup \psi_N(K_N) \sqcup \psi_N^{-1}(K_N) \sqcup D_N,$$

$$\varphi_N(K_N) = \psi_N(K_N) \sqcup \psi_N^{-1}(K_N)$$

をみたす $K_N \in \mathcal{P}(S^{N-1})$ が存在する. \square

定理 5.1 が証明されたとすると, $N = 3$ の場合には, ([2] でも述べられているが) 6 節において述べるように, D_3 が可算集合であることが分かり, それを用いて 8 節での議論が可能となる. しかしながら, $N \geq 4$ の場合には, D_N が非可算であるため, 8 節での議論をするためには, 更なる議論が必要となる. これについては 7 節において述べることにする.

以下, 定理 5.1 を証明する. その証明には命題 5.1 も用いるので, 選択公理を本質的に用いることになる. ここで, 集合 D が可算であるとは, D から自然数全体の集合 \mathbf{N} への全単射が存在することである. また, D が高々可算であるとは, D が可算集合または有限集合 (空集合を含む) となることである. \mathbf{Z} や G_N は可算集合であり, \mathbf{R} 及び S^{N-1} は非可算集合 (\mathbf{N} より真に濃度の大きい集合) であることに注意する. まず, 次を準備する.

命題 5.2. $S^{N-1} \setminus D_N \neq \emptyset$

が成り立つ.

証明. (a) $N = 3$ のとき, $\hat{\rho} \in G_3 \setminus \{\iota_3\}$ とすると, 注意 2.4 (i) によって $\hat{\rho}$ の回転軸 $\ell[\hat{\rho}] = E_3[\hat{\rho}]$ は原点を通る直線であり, $S^2 \cap \ell[\hat{\rho}]$ は 2 点からなる集合である. ここで, $G_3 \setminus \{\iota_3\}$ は可算集合であるから,

$$D_3 = \bigcup_{\hat{\rho} \in G_3 \setminus \{\iota_3\}} (S^2 \cap \ell[\hat{\rho}]) \in \mathcal{P}(S^2)$$

も可算であり, S^2 は非可算であるから, $S^2 \setminus D_3 \neq \emptyset$ が成り立つ.

(b) $N \geq 4$ のとき, (a) によって $\hat{\xi} \in S^2 \setminus D_3$ をとることができ, これを用いて

$$\xi = (\hat{\xi}, 0_{N-3}) \in S^{N-1}$$

とおく. このとき, $\xi \in D_N$ であると仮定すると,

$$\xi \in S^{N-1} \cap E_N[\rho]$$

をみたす $\rho \in G_N \setminus \{\iota_N\}$ が存在し, 注意 4.2 (iv) によって

$$\rho = \begin{pmatrix} \hat{\rho} & 0_{N-3,3} \\ 0_{3,N-3} & \iota_{N-3} \end{pmatrix}$$

をみたす $\hat{\rho} \in G_3 \setminus \{\iota_3\}$ が存在する. ここで, $\xi \in E_N[\rho]$ より, $\rho(\xi) = \xi$, $\rho^t \xi = {}^t \xi$ であるから,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} {}^t \hat{\xi} \\ {}^t 0_{N-3} \end{pmatrix} &= {}^t \xi = \rho^t \xi \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\rho} & 0_{N-3,3} \\ 0_{3,N-3} & \iota_{N-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t \hat{\xi} \\ {}^t 0_{N-3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\rho} {}^t \hat{\xi} \\ {}^t 0_{N-3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, ${}^t \hat{\xi} = \hat{\rho} {}^t \hat{\xi}$, $\hat{\xi} = \hat{\rho}(\hat{\xi})$ が得られる. よって, $\hat{\xi} \in D_3$ となるが, これは $\hat{\xi} \in S^2 \setminus D_3$ に矛盾する.

従って,

$$\xi \notin D_N, \xi \in S^{N-1} \setminus D_N \neq \emptyset$$

が成り立つ. \square

2 節, 4 節で得られた事実及び, 命題 5.1 と合わせて, 定理 5.1 を示す. 実際には, 命題 5.2 が得られれば, 定理 5.1 の証明は $N = 3$ の場合 ([2] 参照) と同様であるが, ここでは, 改めてその証明を述べることにする.

定理 5.1 の証明. (a) $\rho(D_N) = D_N$ for $\rho \in G_N$

が成り立つことを示す. $\rho = \iota_N$ のときは明らかであるから, $\rho \in G_N \setminus \{\iota_N\}$ とする.

(\subset) $x \in D_N$ とすると, $\sigma \in G_N \setminus \{\iota_N\}$ が存在して, $x \in S^{N-1} \cap E_N[\sigma] \subset E_N[\sigma]$ となるが, 定義 2.4 より $\sigma(x) = x$ である. このとき, $\rho\sigma\rho^{-1} \in G_N \setminus \{\iota_N\}$ であり,

$$\rho\sigma\rho^{-1}(\rho(x)) = \rho\sigma(x) = \rho(x)$$

となるから, 注意 2.2 (ii), 定義 2.4 によって

$$\rho(x) \in S^{N-1} \cap E_N[\rho\sigma\rho^{-1}] \subset D_N$$

が成り立つ.

(\supset) $\rho^{-1} \in G_N \setminus \{\iota_N\}$ であるから, 前述によって $\rho^{-1}(D_N) \subset D_N$ が得られる. 従って,

$$D_N = \rho(\rho^{-1}(D_N)) \subset \rho(D_N)$$

が成り立つ.

(b) $\rho \in G_N$ とすると, 注意 2.2 (ii) より, $\rho(S^{N-1}) = S^{N-1}$ であるから, (a) 及び命題 5.2 によって

$$\begin{aligned} \rho(S^{N-1} \setminus D_N) &= \rho(S^{N-1}) \setminus \rho(D_N) = S^{N-1} \setminus D_N \\ &\neq \emptyset \end{aligned}$$

が成り立つ.

(c) $\xi, \eta \in S^{N-1}$ に対し,

$$\xi \stackrel{N}{\sim} \eta \iff \sigma \in G_N \text{ が存在して } \eta = \sigma(\xi)$$

として S^{N-1} 上の二項関係 $\stackrel{N}{\sim}$ を定義すると, 注意

4.2 を用いることにより, これは S^{N-1} 上の同値関係となる事が分かる. 従って, \sim^N (を $S^{N-1} \setminus D_N$ 上に制限した二項関係) は $S^{N-1} \setminus D_N$ 上の同値関係である. そこで, $\xi \in S^{N-1} \setminus D_N$ に対し, その同値類を $[\xi]_N (\in \mathcal{P}(S^{N-1} \setminus D_N))$ と表すことにする. このとき, 命題 5.1 により, $Y_N \in \mathcal{P}(S^{N-1} \setminus D_N)$ が存在して,

$$S^{N-1} \setminus D_N = \bigsqcup_{\eta \in Y_N} [\eta]_N$$

と表すことができる. ここで, $Y_N \subset S^{N-1} \setminus D_N$ であるから, (b) によって

$\rho(Y_N) \subset \rho(S^{N-1} \setminus D_N) = S^{N-1} \setminus D_N$ for $\rho \in G_N$ が成り立つ.

(d) 定義 4.4 の記号を用いて

$$K_N = \bigcup_{\sigma \in \Phi_N} \sigma(Y_N) (\in \mathcal{P}(S^{N-1}))$$

とおく. このとき, (c) によって $K_N \subset S^{N-1} \setminus D_N$ かつ

$$\begin{aligned} \psi_N(K_N) &= \psi_N\left(\bigcup_{\sigma \in \Phi_N} \sigma(Y_N)\right) = \bigcup_{\sigma \in \Phi_N} \psi_N \sigma(Y_N) \\ &= \bigcup_{\rho \in \psi_N \Phi_N} \rho(Y_N) \subset S^{N-1} \setminus D_N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_N^{-1}(K_N) &= \psi_N^{-1}\left(\bigcup_{\sigma \in \Phi_N} \sigma(Y_N)\right) = \bigcup_{\sigma \in \Phi_N} \psi_N^{-1} \sigma(Y_N) \\ &= \bigcup_{\rho \in \psi_N^{-1} \Phi_N} \rho(Y_N) \subset S^{N-1} \setminus D_N \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, 命題 4.3 により,

$$\begin{aligned} \varphi_N(K_N) &= \varphi_N\left(\bigcup_{\sigma \in \Phi_N} \sigma(Y_N)\right) = \bigcup_{\sigma \in \Phi_N} \varphi_N \sigma(Y_N) \\ &= \bigcup_{\rho \in \varphi_N \Phi_N} \rho(Y_N) = \bigcup_{\rho \in \psi_N \Phi_N \cup \psi_N^{-1} \Phi_N} \rho(Y_N) \\ &= \left(\bigcup_{\rho \in \psi_N \Phi_N} \rho(Y_N)\right) \cup \left(\bigcup_{\rho \in \psi_N^{-1} \Phi_N} \rho(Y_N)\right) \\ &= \psi_N(K_N) \cup \psi_N^{-1}(K_N) \end{aligned}$$

が得られる.

$$(e) \quad S^{N-1} \setminus D_N = K_N \cup \psi_N(K_N) \cup \psi_N^{-1}(K_N)$$

が成り立つことを示す.

(\supset) (d) による.

(\subset) $\xi \in S^{N-1} \setminus D_N$ とすると, (d) によって, $\eta \in Y_N$ が存在して $\xi \in [\eta]_N$ となり, $\rho \in G_N$ が存在して $\xi = \rho(\eta)$ が成り立つ. ここで, 命題 4.3 によって

$$\rho \in G_N = \Phi_N \sqcup \psi_N \Phi_N \sqcup \psi_N^{-1} \Phi_N$$

であるから, (d) を用いると, $\rho \in \Phi_N$ のとき,

$$\xi = \rho(\eta) \in \rho(Y_N) \subset \bigcup_{\sigma \in \Phi_N} \sigma(Y_N) = K_N,$$

$\rho \in \psi_N \Phi_N$ のとき,

$$\xi = \rho(\eta) \in \rho(Y_N) \subset \bigcup_{\sigma \in \psi_N \Phi_N} \sigma(Y_N) = \psi_N(K_N),$$

$\rho \in \psi_N^{-1} \Phi_N$ のとき,

$$\xi = \rho(\eta) \in \rho(Y_N) \subset \bigcup_{\sigma \in \psi_N^{-1} \Phi_N} \sigma(Y_N) = \psi_N^{-1}(K_N)$$

が成り立つ.

$$(f) \quad K_N \cap \psi_N(K_N) = \phi$$

が成り立つことを示す.

$K_N \cap \psi_N(K_N) \neq \phi$ と仮定し, $\zeta \in K_N \cap \psi_N(K_N)$ をとる. (d) によって

$$\begin{aligned} \zeta \in K_N &= \bigcup_{\sigma \in \Phi_N} \sigma(Y_N), \\ \zeta \in \psi_N(K_N) &= \bigcup_{\rho \in \psi_N \Phi_N} \rho(Y_N) \end{aligned}$$

であるから, $\sigma \in \Phi_N$, $\rho \in \psi_N \Phi_N$ が存在して, $\zeta \in \sigma(Y_N)$, $\zeta \in \rho(Y_N)$ となり, $\xi, \eta \in Y_N$ が存在して, $\zeta = \sigma(\xi) = \rho(\eta)$ が成り立つ. このとき,

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} \rho \in G_N, \quad \sigma(\xi) = \omega = \rho(\eta), \quad \xi = \sigma^{-1} \rho(\eta), \\ \xi \sim^N \eta, \quad [\xi]_N = [\eta]_N \end{aligned}$$

となるから, (c) によって $\xi = \eta$ が成り立つ.

これより, $\sigma = \rho$ が成り立つ. 実際, もし $\sigma \neq \rho$ ならば,

$$\sigma^{-1} \rho \in G_N \setminus \{\iota_N\}, \quad \xi = \sigma^{-1} \rho(\eta) = \sigma^{-1} \rho(\xi)$$

であるから, $\xi \in S^{N-1} \cap \ell[\sigma^{-1} \rho] \subset D_N$ が得られ, $\xi \in Y_N \subset S^{N-1} \setminus D_N$ に矛盾する.

従って, $\sigma = \rho \in \Phi_N \cap \psi_N \Phi_N \neq \phi$ となり, 命題 4.3 に矛盾する.

(g) (f) により,

$$\begin{aligned} \phi &= \psi_N^{-1}(K_N \cap \psi_N(K_N)) \\ &= \psi_N^{-1}(K_N) \cap \psi_N^{-1}(\psi_N(K_N)) \\ &= \psi_N^{-1}(K_N) \cap K_N, \\ \phi &= \psi_N(K_N \cap \psi_N(K_N)) \\ &= \psi_N(K_N) \cap \psi_N(\psi_N(K_N)) \\ &= \psi_N(K_N) \cap \psi_N^{-1}(K_N) \end{aligned}$$

が得られる. 従って, (e), (f) と合わせると,

$$S^{N-1} \setminus D_N = K_N \sqcup \psi_N(K_N) \sqcup \psi_N^{-1}(K_N),$$

$$S^{N-1} = K_N \sqcup \psi_N(K_N) \sqcup \psi_N^{-1}(K_N) \sqcup D_N$$

が成り立つ. \square

6. Hausdorff の定理 (II) (その1)

5 節においても述べたように, 8 節以降の議論のためには, 定理 5.1 (Hausdorff の定理 (I)) と共に, 更なる性質として次の定理が重要となる. この定理も Hausdorff の定理と呼ばれる.

定理 6.1 (Hausdorff の定理 (II)).

$$S^{N-1} \stackrel{(N)}{\equiv_r} S^{N-1} \setminus D_N$$

が成り立つ. \square

ここでは, 3 次元の場合にこの定理を証明する. 実際には, [2] においてもこれに相当する性質が述べられているが, この証明の中で 7 節において用いる性質を明確にするため, 敢えてその証明を述べることにする.

定理 6.2. $S^2 \stackrel{(3)}{\equiv_r} S^2 \setminus D_3$

が成り立つ. \square

まず, 次を示す. この性質は 7 節においても用いられる.

命題 6.1. $D \in \mathcal{P}(S^2)$ を高々可算な集合とすると,

$$D \cap \hat{\rho}_0^n(D) = \emptyset \quad \text{for all } n \in \mathbf{N}$$

をみたす $\hat{\rho}_0 \in SO(\mathbf{R}^3)$ が存在する.

証明. (a) $D \subset S^2$ より,

$$-D \subset S^2, D \cup (-D) \subset S^2$$

であり, D は高々可算であるから, $-D, D \cup (-D)$ は高々可算である. また, S^2 は非可算であるから,

$$S^2 \setminus (D \cup (-D)) \neq \emptyset$$

が成り立つ.

そこで, $\hat{\zeta} \in S^2 \setminus (D \cup (-D))$ を 1 つとり, 例 2.2 を用いて,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}[\hat{\zeta}; \theta] &= \hat{\gamma}[0_3, \hat{\zeta}; \theta] = \hat{\sigma}[\hat{\zeta}] \rho[\theta] \hat{\sigma}[\hat{\zeta}]^{-1} \\ &(\in SO(\mathbf{R}^3)) \quad \text{for } \theta \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

とおくと, $\hat{\rho}[\hat{\zeta}; \theta]$ は

$$\ell[\hat{\zeta}] = \ell[0_3, \hat{\zeta}] = \mathbf{R}\hat{\zeta} (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$$

を回転軸とする回転角 θ の回転である.

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \Theta_1[\hat{\xi}, \hat{\eta}] &= \{\theta \in \mathbf{R} \mid \hat{\rho}[\hat{\zeta}; \theta](\hat{\xi}) = \hat{\eta}\} \\ &(\in \mathcal{P}(\mathbf{R})) \quad \text{for } \hat{\xi}, \hat{\eta} \in S^2 \end{aligned}$$

とおく. このとき, $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in S^2$ に対し, $\Theta_1[\hat{\xi}, \hat{\eta}]$ は空集

合または可算集合 (従って, 高々可算) である. 実際, $\Theta_1[\hat{\xi}, \hat{\eta}] \neq \emptyset$ と仮定し, $\theta_1[\hat{\xi}, \hat{\eta}] \in \Theta_1[\hat{\xi}, \hat{\eta}]$ を 1 つとると, 例 2.2 を用いることにより,

$$\Theta_1[\hat{\xi}, \hat{\eta}] = \theta_1[\hat{\xi}, \hat{\eta}] + 2\pi\mathbf{Z}$$

が成り立つことが分かり, これは可算集合である.

そこで,

$$\begin{aligned} \Theta_1[\hat{\eta}] &= \{\theta \in \mathbf{R} \mid \hat{\eta} \in \hat{\rho}[\hat{\zeta}; \theta](D)\} \\ &= \bigcup_{\hat{\xi} \in D} \Theta_1[\hat{\xi}, \hat{\eta}] (\in \mathcal{P}(\mathbf{R})) \quad \text{for } \hat{\eta} \in S^2 \end{aligned}$$

とおくと, D が高々可算であることから, $\hat{\eta} \in S^2$ に対して $\Theta_1[\hat{\eta}]$ は高々可算である. 従って,

$$\Theta_1 = \bigcup_{(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in D \times D} \Theta_1[\hat{\xi}, \hat{\eta}] = \bigcup_{\hat{\eta} \in D} \Theta_1[\hat{\eta}] (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}))$$

とおくと, Θ_1 も高々可算である.

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \Theta_0 &= \{\theta \in \mathbf{R} \mid D \cap \hat{\rho}[\hat{\zeta}; \theta](D) \neq \emptyset\} \\ &(\in \mathcal{P}(\mathbf{R})) \end{aligned}$$

とおくと,

$$\Theta_0 \subset \Theta_1$$

であり, (b) によって Θ_1 は高々可算であるから, Θ_0 も高々可算である. そこで,

$$\Theta = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{n} \Theta_0 (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}))$$

とおくと, 各 $\frac{1}{n} \Theta_0$ ($n \in \mathbf{N}$) は高々可算であるから, Θ は高々可算である.

また, 例 2.2 によって

$$\hat{\rho}[\hat{\zeta}; \theta]^n = \hat{\rho}[\hat{\zeta}; n\theta] \quad \text{for } \theta \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$$

であるから, $\theta \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$ に対し,

$$\begin{aligned} \theta \in \frac{1}{n} \Theta_0 &\iff n\theta \in \Theta_0 \\ &\iff D \cap \hat{\rho}[\hat{\zeta}; n\theta](D) \neq \emptyset \\ &\iff D \cap \hat{\rho}[\hat{\zeta}; \theta]^n(D) \neq \emptyset \end{aligned}$$

成り立つ. 従って,

$$D \cap \hat{\rho}[\hat{\zeta}; \theta]^n(D) = \emptyset \quad \text{for all } \theta \in \mathbf{R} \setminus \Theta, n \in \mathbf{N}$$

が得られる.

そこで, $\theta_0 \in \mathbf{R} \setminus \Theta (\subset \mathbf{R})$ を 1 つとり,

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}[\hat{\zeta}; \theta_0] (\in SO(\mathbf{R}^3))$$

とおくと, 主張が成り立つ. \square

命題 6.1 により, 次が成り立つ. D_3 は可算であるから, これによって定理 6.2 が得られる. ここで,

$$\mathbf{N}_0 = \{0\} \cup \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

とする.

命題 6.2. $D \in \mathcal{P}(S^2)$ を高々可算な集合とすると,

$$S^2 \stackrel{(3)}{=} S^2 \setminus D$$

が成り立つ.

証明. $D \in \mathcal{P}(S^2)$ は高々可算な集合であるから, 命題 6.1 により, $\hat{\rho}_0 \in SO(\mathbf{R}^3)$ が存在して,

$$D \cap \hat{\rho}_0^n(D) = \emptyset \quad \text{for all } n \in \mathbf{N}$$

が成り立つ. そこで,

$$D_0 = D \cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \hat{\rho}_0^n(D) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}_0} \hat{\rho}_0^n(D) \in \mathcal{P}(S^2)$$

とおくと,

$$D \cap \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \hat{\rho}_0^n(D) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (D \cap \hat{\rho}_0^n(D)) = \emptyset$$

であるから,

$$D_0 \setminus D = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \hat{\rho}_0^n(D)$$

が成り立つ. 従って,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_0(D_0) &= \hat{\rho}_0 \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}_0} \hat{\rho}_0^n(D) \right) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}_0} \hat{\rho}_0^{n+1}(D) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \hat{\rho}_0^n(D) = D_0 \setminus D \end{aligned}$$

が得られ, $D_0 \stackrel{(3)}{=} D_0 \setminus D$ が成り立つ. 更に,

$$\begin{aligned} S^2 &= (S^2 \setminus D_0) \sqcup D_0, \\ S^2 \setminus D &= (S^2 \setminus D_0) \sqcup (D_0 \setminus D) \end{aligned}$$

であるから, 注意 3.2 (ii) によって $S^2 \stackrel{(3)}{=} S^2 \setminus D$ が得られる. \square

7. Hausdorff の定理 (II) (その 2)

ここでは, 4 次元以上の場合に定理 6.1 (Hausdorff の定理 (II)) を証明する. まず, 次を定義する.

定義 7.1. (i) $D \in \mathcal{P}(S^{N-1})$ に対して

$$\begin{aligned} W_N(D) &= \{t\xi \in \mathbf{R}^N \mid \xi \in D, t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\} \\ &(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)) \end{aligned}$$

とおく.

(ii) $N \geq 4$ のとき,

$$\begin{aligned} H_N &= \{0_3\} \times S^{N-4} = \{(0_3, \tilde{\xi}) \in \mathbf{R}^N \mid \tilde{\xi} \in S^{N-4}\} \\ &(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)) \end{aligned}$$

とおく. \square

注意 7.1. $N \geq 4$ とする.

(i) $H_N \subset S^{N-1} (\subset \mathbf{R}^N)$.

(ii) (i) 及び注意 4.2 (iv) により,

$$H_N \subset D_N (\subset \mathbf{R}^N)$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad W_N(D_N) &= \{t\xi \in \mathbf{R}^N \mid \xi \in D_N, t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\} \\ &= \left(\bigcup_{\rho \in G_N \setminus \{\iota_N\}} E_N[\rho] \right) \setminus \{0_N\}. \end{aligned}$$

特に,

$$W_3(D_3) = \left(\bigcup_{\hat{\rho} \in G_3 \setminus \{\iota_3\}} E_3[\hat{\rho}] \right) \setminus \{0_3\}.$$

(iv) (iii) 及び注意 5.1 により

$$\begin{aligned} D_N \setminus H_N &\subset \left(\bigcup_{\hat{\rho} \in G_3 \setminus \{\iota_3\}} E_3[\hat{\rho}] \times \mathbf{R}^{N-3} \right) \setminus H_N \\ &\subset W_3(D_3) \times \mathbf{R}^{N-3} \end{aligned}$$

が成り立つ. \square

定理 6.1 の証明は, 次の 2 つの段階に分けて考える.

補題 7.1. $N \geq 4$ とすると,

$$S^{N-1} \setminus D_N \stackrel{(N)}{=} S^{N-1} \setminus H_N$$

が成り立つ. \square

補題 7.2. $N \geq 4$ とすると,

$$S^{N-1} \setminus H_N \stackrel{(N)}{=} S^{N-1}$$

が成り立つ. \square

補題 7.1 の証明のために, 次を準備する.

命題 7.1. $D \in \mathcal{P}(S^{N-1})$, $\rho_0 \in SO(\mathbf{R}^N)$ は

$$D = -D, \quad \rho_0^n(D) \cap D = \emptyset \quad \text{for all } n \in \mathbf{N}$$

をみたすとする. このとき,

$$\rho_0^n(W_N(D)) \cap W_N(D) = \emptyset \quad \text{for all } n \in \mathbf{N}$$

が成り立つ.

証明. ある $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して

$$\rho_0^{n_0}(W_N(D)) \cap W_N(D) \neq \emptyset$$

が成り立つと仮定する. このとき,

$$y = \rho_0^{n_0}(x) (\in \mathbf{R}^N)$$

をみたす $x, y \in W_N(D)$ が存在し,

$$x = s\xi, \quad y = t\eta (\in \mathbf{R}^N)$$

をみたす $s, t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ 及び $\xi, \eta \in D$ が存在する.

ここで, 注意 2.2 (ii) によって

$$|y|_N = |\rho_0^{n_0}(x)|_N = |x|_N (\in \mathbf{R})$$

であり, $\xi, \eta \in D \subset S^{N-1}$ であるから,

$$\begin{aligned} |s| &= |s||\xi|_N = |x|_N = |y|_N = |t||\eta|_N = |t|, \\ s &= \pm t \end{aligned}$$

が成り立つ. 更に, $\pm D = D$ であるから,

$$\begin{aligned} t\eta = y &= \rho_0^{n_0}(x) = s\rho_0^{n_0}(\xi) = \pm t\rho_0^{n_0}(\xi), \\ \eta &= \pm \rho_0^{n_0}(\xi) \in \rho_0^{n_0}(D) \cap (\pm D) = \rho_0^{n_0}(D) \cap D \\ &\neq \phi \end{aligned}$$

(複号同順) となり, (いずれの場合も) 矛盾である. \square

補題 7.1 の証明. (a) D_3 は可算集合であるから, 命題 6.1 により, $\hat{\rho}_0 \in SO(\mathbf{R}^3)$ が存在して,

$$D_3 \cap \hat{\rho}_0^n(D_3) = \phi \quad \text{for all } n \in \mathbf{N}$$

が成り立つ. 更に, 注意 5.1 (ii) により, $D_3 = -D_3$ であるから, 命題 7.1 によって

$$\hat{\rho}_0^n(W_3(D_3)) \cap W_3(D_3) = \phi \quad \text{for all } n \in \mathbf{N}$$

が成り立つ. この $\hat{\rho}_0$ を用いて

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_0 & 0_{N-3,3} \\ 0_{3,N-3} & \iota_{N-3} \end{pmatrix} (\in SO(\mathbf{R}^N))$$

を定義する.

$$(b) \quad \rho_0^n(D_N \setminus H_N) \cap (D_N \setminus H_N) = \phi \\ \text{for all } n \in \mathbf{N}$$

が成り立つことを示す.

ある $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して

$$\rho_0^{n_0}(D_N \setminus H_N) \cap (D_N \setminus H_N) \neq \phi$$

が成り立つと仮定する. このとき,

$$\xi \in \rho_0^{n_0}(D_N \setminus H_N) \cap (D_N \setminus H_N)$$

を 1 つとると, $\xi = \rho_0^{n_0}(\eta)$ をみたす $\eta \in D_N \setminus H_N$ が存在し, 注意 7.1 (iv) によって

$$\xi, \eta \in D_N \setminus H_N \subset W_3(D_3) \times \mathbf{R}^{N-3}$$

が成り立つ. 従って,

$$\xi = (\hat{\xi}, \tilde{\xi}), \eta = (\hat{\eta}, \tilde{\eta}) (\in W_3(D_3) \times \mathbf{R}^{N-3} \subset \mathbf{R}^N)$$

となる $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in W_3(D_3)$ 及び $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathbf{R}^{N-3}$ が存在し,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} {}^t\hat{\xi} \\ {}^t\tilde{\xi} \end{pmatrix} &= {}^t\xi = {}^t[\rho_0^{n_0}(\eta)] = \rho_0^{n_0} {}^t\eta \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\rho}_0^{n_0} & 0_{N-3,3} \\ 0_{3,N-3} & \iota_{N-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\hat{\eta} \\ {}^t\tilde{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0^{n_0} {}^t\hat{\eta} \\ {}^t\tilde{\eta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, ${}^t\hat{\xi} = \rho_0^{n_0} {}^t\hat{\eta}$, $\hat{\xi} = \rho_0^{n_0}(\hat{\eta})$ であるから,

$$\hat{\xi} = \rho_0^{n_0}(\hat{\eta}) \in \rho_0^{n_0}(W_3(D_3)) \cap W_3(D_3) \neq \phi$$

が得られ, (a) に矛盾する.

$$(c) \quad A_1 = \bigcup_{n \in \mathbf{N}_0} \rho_0^n(D_N \setminus H_N), \quad B_1 = \rho_0(A_1), \\ A_2 = B_2 = (S^{N-1} \setminus H_N) \setminus A_1$$

とおくと,

$$A_1 \stackrel{(N)}{\equiv_r} B_1, \quad A_1 \cap A_2 = \phi$$

であり,

$$\begin{aligned} A_1 &= \rho_0^0(D_N \setminus H_N) \cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \rho_0^n(D_N \setminus H_N) \\ &= (D_N \setminus H_N) \cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \rho_0^n(D_N \setminus H_N) \end{aligned}$$

が成り立つ. また,

$$\begin{aligned} B_1 &= \rho_0(A_1) = \rho_0 \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}_0} \rho_0^n(D_N \setminus H_N) \right) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbf{N}_0} \rho_0^{n+1}(D_N \setminus H_N) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \rho_0^n(D_N \setminus H_N) \end{aligned}$$

であり, (b) によって

$$\begin{aligned} &(D_N \setminus H_N) \cap B_1 \\ &= (D_N \setminus H_N) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \rho_0^n(D_N \setminus H_N) \right) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbf{N}} ((D_N \setminus H_N) \cap \rho_0^n(D_N \setminus H_N)) = \phi \end{aligned}$$

であるから,

$$A_1 = (D_N \setminus H_N) \sqcup B_1, \quad B_1 = A_1 \setminus (D_N \setminus H_N)$$

が得られ,

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= (A_1 \setminus (D_N \setminus H_N)) \cap ((S^{N-1} \setminus H_N) \setminus A_1) \\ &= \phi \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $H_N \subset D_N$ より,

$$S^{N-1} \setminus D_N = (S^{N-1} \setminus H_N) \setminus (D_N \setminus H_N)$$

であるから, 注意 3.2 (ii) によって

$$\begin{aligned} S^{N-1} \setminus H_N &= A_1 \sqcup A_2 \\ &\stackrel{(N)}{\equiv_r} B_1 \sqcup B_2 = (A_1 \setminus (D_N \setminus H_N)) \sqcup A_2 \\ &= (S^{N-1} \setminus H_N) \setminus (D_N \setminus H_N) \\ &= S^{N-1} \setminus D_N \end{aligned}$$

が成り立つ. \square

補題 7.1 と有限分割回転合同に関する Bernstein 型定理 (定理 3.1 (ii)) を合わせると, 次が成り立つことが分かる.

命題 7.2. $N \geq 4$ とすると,

$$S^{N-1} \setminus H_N \stackrel{(N)}{\equiv_r} S^{N-1} \setminus E_N[\psi_N]$$

が成り立つ.

証明. $0_3 \in \{0_2\} \times \mathbf{R}$ であり, 注意 4.1 (iii) によって

$$E_N[\psi_N] = \{0_2\} \times \mathbf{R}^{N-2} = \{0_2\} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{N-3}$$

であるから,

$$\begin{aligned} H_N &= \{0_3\} \times S^{N-4} \subset S^{N-1} \cap E_N[\psi_N] \\ &\subset \bigcup_{\rho \in G_N \setminus \{\iota_N\}} (S^{N-1} \cap E_N[\rho]) = D_N \end{aligned}$$

が得られ,

$$\begin{aligned} S^{N-1} \setminus D_N &\subset S^{N-1} \setminus (S^{N-1} \cap E_N[\psi_N]) \\ &\subset S^{N-1} \setminus H_N \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, 補題 7.1 によって

$$S^{N-1} \setminus D_N \stackrel{(N)}{\equiv}_r S^{N-1} \setminus H_N$$

であるから, 定理 3.1 (ii) によって

$$\begin{aligned} S^{N-1} \setminus H_N &\stackrel{(N)}{\equiv}_r S^{N-1} \setminus (S^{N-1} \cap E_N[\psi_N]) \\ &= S^{N-1} \setminus E_N[\psi_N] \end{aligned}$$

が得られる. \square

補題 7.2 の証明は, 次元 N に関する帰納法を用いて行う. まず, 次を準備する.

定義 7.2. 線形写像 $\iota_{N-1,N} : \mathbf{R}^{N-1} \rightarrow \mathbf{R}^N$ を行列

$$\iota_{N-1,N} = \begin{pmatrix} 0_{N-1} \\ \iota_{N-1} \end{pmatrix} (\in L(\mathbf{R}^{N-1}, \mathbf{R}^N)),$$

i.e. $\iota_{N-1,N}(x') = (0, x') (\in \mathbf{R}^N)$ for $x' \in \mathbf{R}^{N-1}$

によって定義する. \square

注意 7.2. $\iota_{N-1,N} : \mathbf{R}^{N-1} \rightarrow \mathbf{R}^N$ は単射であるから,

$$\begin{aligned} \iota_{N-1,N}(A \setminus B) &= \iota_{N-1,N}(A) \setminus \iota_{N-1,N}(B) \\ &(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)) \quad \text{for } A, B \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^{N-1}) \end{aligned}$$

が成り立つ. \square

命題 7.3. $N \geq 4$ とする.

(i) $\rho' \in SO(\mathbf{R}^{N-1})$ に対して,

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0_{N-1} \\ \iota_{0_{N-1}} & \rho' \end{pmatrix} (\in SO(\mathbf{R}^N))$$

とおくと,

$$\iota_{N-1,N}\rho' = \rho\iota_{N-1,N} (\in L(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^{N-1}))$$

が成り立つ.

(ii) $A, B \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^{N-1})$ とすると,

$$A \stackrel{(N-1)}{\equiv}_r B \Rightarrow \iota_{N-1,N}(A) \stackrel{(N)}{\equiv}_r \iota_{N-1,N}(B)$$

が成り立つ.

証明. (i) $\rho' \in SO(\mathbf{R}^{N-1})$ とすると,

$$\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{N-1} \\ \iota_{0_{N-1}} & [\rho']^{-1} \end{pmatrix} (\in SO(\mathbf{R}^N))$$

であるから,

$$\begin{aligned} \rho^{-1}\iota_{N-1,N}\rho' &= \begin{pmatrix} 1 & 0_{N-1} \\ \iota_{0_{N-1}} & [\rho']^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{N-1} \\ \iota_{N-1} \end{pmatrix} \rho' \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0_{N-1} \\ \iota_{0_{N-1}} & [\rho']^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{N-1} \\ \rho' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0_{N-1} \\ [\rho']^{-1}\rho' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{N-1} \\ \iota_{N-1} \end{pmatrix} \\ &= \iota_{N-1,N} (\in L(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^{N-1})) \end{aligned}$$

が得られ, 主張が従う.

(ii) 仮定より, $n \in \mathbf{N}$ 及び $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}}, \{B_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^{N-1})$ が存在して,

$$\begin{aligned} A &= \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} A_i, \quad B = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} B_i, \\ A_i &\stackrel{N-1}{\equiv}_r B_i \quad (i \in \mathbf{N}_{1,n}) \end{aligned}$$

をみたす. 従って, $\{\rho'_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset SO(\mathbf{R}^{N-1})$ が存在して,

$$\rho'_i(A_i) = B_i \quad (i \in \mathbf{N}_{1,n})$$

が成り立つ. ここで, $\iota_{N-1,N} : \mathbf{R}^{N-1} \rightarrow \mathbf{R}^N$ は単射であるから,

$$\begin{aligned} \iota_{N-1,N}(A) &= \iota_{N-1,N}\left(\bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} A_i\right) \\ &= \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \iota_{N-1,N}(A_i), \\ \iota_{N-1,N}(B) &= \iota_{N-1,N}\left(\bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} B_i\right) \\ &= \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \iota_{N-1,N}(B_i) (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)) \end{aligned}$$

が成り立つ. このとき,

$$\rho_i = \begin{pmatrix} 1 & 0_{N-1} \\ \iota_{0_{N-1}} & \rho'_i \end{pmatrix} (\in SO(\mathbf{R}^N)) \quad (i \in \mathbf{N}_{1,n})$$

によって $\{\rho_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset SO(\mathbf{R}^N)$ を定義すれば, (i) によって

$$\begin{aligned} \iota_{N-1,N}(B_i) &= \iota_{N-1,N}(\rho'_i(A_i)) = \iota_{N-1,N}\rho'_i(A_i) \\ &= \rho_i\iota_{N-1,N}(A_i) = \rho_i(\iota_{N-1,N}(A_i)), \\ \iota_{N-1,N}(A_i) &\stackrel{N}{\equiv}_r \iota_{N-1,N}(B_i) \quad (i \in \mathbf{N}_{1,n}) \end{aligned}$$

となるから,

$$\iota_{N-1,N}(A) \stackrel{(N)}{\equiv}_r \iota_{N-1,N}(B)$$

が成り立つ. \square

補題 7.2 の証明. N に関する帰納法による.

(i) $N = 4$ のとき,

$$\begin{aligned} \hat{S}^2 &= \iota_{3,4}(S^2) = \{(0, \hat{\xi}) \in \mathbf{R}^4 \mid \hat{\xi} \in S^2\} \\ &(\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^4)) \end{aligned}$$

とおく. $\{-e_{3,3}, e_{3,3}\} (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^3))$ は有限集合 (従って高々可算) であるから, 命題 6.2 によって

$$S^2 \setminus \{-e_{3,3}, e_{3,3}\} \stackrel{(3)}{\equiv_r} S^2$$

が成り立つ. また,

$$S^0 = \{\xi \in \mathbf{R} \mid |\xi| = 1\} = \{-1, 1\} (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}))$$

であるから,

$$\begin{aligned} H_4 &= \{0_3\} \times S^0 = \{0_3\} \times \{-1, 1\} = \{-e_{4,4}, e_{4,4}\} \\ &= \iota_{3,4}(\{-e_{3,3}, e_{3,3}\}) \subset \hat{S}^2 \end{aligned}$$

が得られ, 注意 7.2 及び命題 7.3 (ii) によって

$$\begin{aligned} \hat{S}^2 \setminus H_4 &= \iota_{3,4}(S^2) \setminus \iota_{3,4}(\{-e_{3,3}, e_{3,3}\}) \\ &= \iota_{3,4}(S^2 \setminus \{-e_{3,3}, e_{3,3}\}) \\ &\stackrel{(4)}{\equiv_r} \iota_{3,4}(S^2) = \hat{S}^2 \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って,

$$A_1 = \hat{S}^2, B_1 = \hat{S}^2 \setminus H_4, A_2 = B_2 = S^3 \setminus \hat{S}^2$$

とおくと, 注意 3.2 (ii) によって

$$S^3 = A_1 \sqcup A_2 \stackrel{(4)}{\equiv_r} B_1 \sqcup B_2 = S^3 \setminus H_4$$

が得られる.

(ii) $N \geq 5$ とし,

$$S^{N-2} \setminus H_{N-1} \stackrel{(N-1)}{\equiv_r} S^{N-2}$$

が成り立つと仮定すると, 命題 7.2 によって

$$\begin{aligned} S^{N-2} &\stackrel{(N-1)}{\equiv_r} S^{N-2} \setminus H_{N-1} \\ &\stackrel{(N-1)}{\equiv_r} S^{N-2} \setminus E_{N-1}[\psi_{N-1}] \end{aligned}$$

が得られる. また, 注意 4.1 (iii) によって

$$E_{N-1}[\psi_{N-1}] = \{0_2\} \times \mathbf{R}^{N-3} (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^{N-1}))$$

であるから,

$$\begin{aligned} S^{N-2} \cap E_{N-1}[\psi_{N-1}] &= S^{N-2} \cap (\{0_2\} \times \mathbf{R}^{N-3}) \\ &= \{0_2\} \times S^{N-4} \end{aligned}$$

が得られ,

$$\begin{aligned} &\iota_{N-1,N}(S^{N-2} \cap E_{N-1}[\psi_{N-1}]) \\ &= \iota_{N-1,N}(\{0_2\} \times S^{N-4}) = \{0\} \times \{0_2\} \times S^{N-4} \\ &= \{0_3\} \times S^{N-4} = H_N \end{aligned}$$

が成り立つ. 更に, 注意 7.2 を用いると,

$$\begin{aligned} &\iota_{N-1,N}(S^{N-2} \setminus E_{N-1}[\psi_{N-1}]) \\ &= \iota_{N-1,N}(S^{N-2} \setminus (S^{N-2} \cap E_{N-1}[\psi_{N-1}])) \\ &= \iota_{N-1,N}(S^{N-2}) \setminus \iota_{N-1,N}(S^{N-2} \cap E_{N-1}[\psi_{N-1}]) \end{aligned}$$

$$= \iota_{N-1,N}(S^{N-2}) \setminus H_N$$

となるから, 命題 7.2 (ii) によって

$$\begin{aligned} \iota_{N-1,N}(S^{N-2}) &\stackrel{(N)}{\equiv_r} \iota_{N-1,N}(S^{N-2} \setminus E_{N-1}[\psi_{N-1}]) \\ &= \iota_{N-1,N}(S^{N-2}) \setminus H_N \end{aligned}$$

が得られる. 従って, 注意 3.2 (ii) によって

$$\begin{aligned} S^{N-1} &= (S^{N-1} \setminus \iota_{N-1,N}(S^{N-2})) \sqcup \iota_{N-1,N}(S^{N-2}) \\ &\stackrel{(N)}{\equiv_r} (S^{N-1} \setminus \iota_{N-1,N}(S^{N-2})) \\ &\quad \sqcup (\iota_{N-1,N}(S^{N-2}) \setminus H_N) \\ &= S^{N-1} \setminus H_N \end{aligned}$$

が成り立つ. \square

定理 6.1 (Hausdorff の定理 (II)) は, 定理 6.2 及び補題 7.1, 補題 7.2, 命題 3.2 (ii) から直ちに得られる.

8. Banach-Tarski の定理の証明

ここでは, Hausdorff の定理 (I), (II) から導かれる直観的には理解し難いと思われる数学的事実を紹介し, それを用いて定理 1.1 (Banach-Tarski の定理) が証明できることについて述べる. 証明そのものについては, 3次元の場合に [2] において述べられているものと同様なので, ここでは省略することにする.

まず, 次の命題により, ‘単位球面 S^{N-1} を有限分割合同によって 2つの単位球面 (の直和) に増殖させることができる’ ことが分かる. ここで, $a \in \mathbf{R}^N$ に対し,

$$S^{N-1}(a) = a + S^{N-1} (\in \mathcal{P}(\mathbf{R}^{N-1}))$$

は a を中心とする \mathbf{R}^N 内の単位球面である. $a, b \in \mathbf{R}^N$, $|a - b|_N > 2$ とするとき, 例 3.1 (ii) によって

$$S^{N-1}(a) \cap S^{N-1}(b) = \emptyset, S^{N-1}(a) \stackrel{N}{\equiv} S^{N-1}(b)$$

が成り立つことに注意する.

命題 8.1. $a, b \in \mathbf{R}^N$, $|a - b|_N > 2$ とすると,

$$S^{N-1} \stackrel{(N)}{\equiv} S^{N-1}(a) \sqcup S^{N-1}(b)$$

が成り立つ. \square

命題 8.1 の証明には, 次の補題 8.1 を用いる. これは, S^{N-1} の $SO(\mathbf{R}^N)$ に関する逆説性に相当する性質であるが, 定理 5.1 (Hausdorff の定理 (I)), 定理 6.1 (Hausdorff の定理 (II)) から 3次元の場合と同様にして証明することができる. また, 補題 8.1 から命

題 8.1 が導かれることについても, 3 次元の場合と同様である.

補題 8.1. $T_1, T_2 \in \mathcal{P}(S^{N-1})$ で,

$$S^{N-1} = T_1 \sqcup T_2, \quad S^{N-1} \stackrel{(N)}{\equiv} T_1, \quad S^{N-1} \stackrel{(N)}{\equiv} T_2$$

をみたすものが存在する. \square

更に, 次の命題により, ‘単位開球 B_1^N を有限分割合同によって 2 つの単位開球 (の直和) に増殖させることができる’ ことが分かる. これは例 1.1 (ii) の特別な場合である. ここで, $a, b \in \mathbf{R}^N$, $|a - b|_N > 2$ とするとき, 例 3.1 (i) によって

$$B_1^N(a) \cap B_1^N(b) = \emptyset, \quad B_1^N(a) \stackrel{N}{\equiv} B_1^N(b)$$

が成り立つことに注意する.

命題 8.2. $a, b \in \mathbf{R}^N$, $|a - b|_N > 2$ とすると,

$$B_1^N \stackrel{(N)}{\equiv} B_1^N(a) \sqcup B_1^N(b)$$

が成り立つ. \square

命題 8.2 の証明には次の補題 8.2 を用いるが, 例 3.2, 補題 3.1, 命題 3.3 を用いることにより, 3 次元の場合と同様にして証明することができる. また, 補題 8.2 から命題 8.2 が導かれることについても 3 次元の場合と同様である.

補題 8.2. $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ で,

$$B_1^N = A_1 \sqcup A_2, \quad B_1^N \stackrel{(N)}{\equiv} A_1, \quad B_1^N \stackrel{(N)}{\equiv} A_2$$

をみたすものが存在する. \square

更に, 命題 8.2 によって次が得られる.

系 8.1. $r \in (0, \infty)$ とすると, 次が成り立つ.

(i) $a, b \in \mathbf{R}^N$, $|a - b|_N > 2r$ ならば,

$$B_r^N \stackrel{(N)}{\equiv} B_r^N(a) \sqcup B_r^N(b).$$

(ii) $\{a^{(j)}\}_{j \in \mathbf{N}_{1,k}} \subset \mathbf{R}^N$, $|a^{(i)} - a^{(j)}|_N > 2r$ ($i \neq j \in \mathbf{N}_{1,k}$) ならば,

$$B_r^N \stackrel{(N)}{\equiv} \bigsqcup_{j \in \mathbf{N}_{1,k}} B_r^N(a^{(j)}). \quad \square$$

有限分割合同に関する Bernstein 型定理 (定理 3.1 (i)) と合わせることで, 3 次元の場合と同様にして次の命題が導かれる.

命題 8.3. $r \in (0, \infty)$, $a \in \mathbf{R}^N$ とし, $A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ が有界かつ $B_r^N(a) \subset A$ をみたすならば,

$$A \stackrel{(N)}{\equiv} B_r^N(a)$$

が成り立つ. \square

命題 8.3 を用いると, 定理 1.1 (Banach-Tarski の定理) も 3 次元の場合と同様にして証明することができる.

参考文献.

1. 福田 拓生, 集合への入門 [無限をかいま見る], 培風館, 2012.
2. 佐藤 得志, 佐藤 雄介, 選択公理のもたらす論理と直観の乖離について – Banach-Tarski の定理を通して –, 宮城教育大学紀要 第 55 巻 (2021), pp.105–120.
3. 砂田 利一, 新版 バナッハ-タルスキーのパラドックス, 岩波科学ライブラリー 165, 岩波書店, 2009.
4. Stan Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Cambridge University Press, 1985.

A second discussion of the dissociation of logic and intuition resulting from the Axiom of Choice :

Through the Banach-Tarski theorem in higher dimensions

SATO Tokushi and SATO Yusuke

Abstract

In modern mathematics, the Axiom of Choice is an indispensable and important axiom. However, this axiom can lead to mathematical facts that are intuitively unacceptable. A typical example is the Banach-Tarski theorem in Euclidean space of three or more dimensions. In this paper, in the case of four or more dimensions, we will explain the details of the proof, focusing on the fact that the Hausdorff theorem is derived using the Axiom of Choice, assuming the argument in three dimensions.

Key words : the Axiom of Choice, the Banach-Tarski theorem, the Hausdorff theorem,
congruence, congruence by finite dessection