円周の長さについて（Ⅱ）

*萬　　伸介・*森岡　正臣・**西城　祐子・**山尾　健一・**小畑　達哉

On the length of circumference (II)

YOROZU Shinsuke, MORIOKA Masaomi, SAIJO Yuko,
YAMAO Kenichi and OBATA Tatsuya

要　旨

本論文は林鶴一が関わった教科書では円周の長さをどのように記述していたかを調べた「円周の長さについて(I)——林鶴一蔵書資料より——」（萬　他、2008）に続くものである。我々は前著（萬　他、2008）において円の内接多角形の周の長さと外接多角形の周の長さの数値表やその数値を求めるために参考とした図版を紹介した。本論文において、我々はこの数値表を用いた円周の長さを求める授業（中学校第一学年；資料の活用）の指導案を紹介し、さらに、中学校と高等学校において、図版を用いて図形の相似に注目しての内接および外接正多角形の辺の長さに関わる授業展開が可能であることにも言及する。

キーワード：円周の長さ、内接正多角形、外接正多角形、資料の活用、相似

１．はじめに

円周の長さについて、林鶴一が関わった幾何学の教科書では「円周はその円に内接する正多角形の周より大きく、外接する正多角形の周より小さい」を「公理」として提示していた（萬　他、2008）。我々は、「円周はその円に内接する正多角形の周より大きく、外接する正多角形の周より小さい」を前提として、「円周の長さについて(I)」で紹介した円の内接多角形の周の長さと外接多角形の周の長さの数値表を用いた円周の長さを求める授業（中学校第一学年；資料の活用）の指導案を紹介する。また、同時に紹介した図版を用いて図形の相似に注目しての内接および外接正多角形の辺の長さに関わる中学校や高等学校での授業展開が可能であることにも言及する。さらに、竹之内（2008）が述べた「人は、円の外に描かれた多角形の方の周が長い、といことを当然のこととして受け入れているが、その方が問題である。」に関連して、アルキメデスは円周の長さをどのようにとらえていたかについても資料（佐藤、1997）から引用して紹介する。実践授業を計画する際の参考資料として利用できるものである。

２．最初の構想

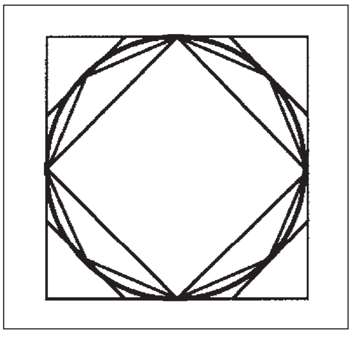
中学校学習指導要領解説数学編（文部科学省、2008）の51ページにおいて、処理した結果を基に「資料の傾向を読みとることができるようにする。」が第一学年の取り扱う内容としている。そして「学習の過程において、誤差や近似値の意味も知ることができるようにする。」とされている。これを受けて、円周の長さを資料から予想させ、円周の長さの近似値のとらえ方としての方法を提示する。

１．導入：紀元前５世紀頃の古代ギリシャでは、円の性質について考えられるようになり、人々の間に円

＊　宮城教育大学教育学部数学教育講座
＊＊　宮城教育大学附属中学校

周の長さを正確に知りたいという思いが強くなったと言われている。ギリシャのアルキメデス［紀元前３世紀頃］が、「円周の長さは、その円の内部にある正多角形の周の長さより長く、その円を内部に含む正多角形の周の長さよりは短くなる。」を利用して円周の長さを計算した。その後、多くの人々によって「より正確に」円周の長さが計算された。その中には、中国の祖冲之（そ　ちゅうし）［５世紀後半頃］や江戸時代の和算家関孝和（せき　たかかず）・建部賢弘（たけべ　かたひろ）［17世紀後半から18世紀前半頃］がいる。

２．課題の提示：「円周の長さは、その円の内部にある正多角形の周の長さより長く、その円を内部に含む正多角形の周の長さよりは短い。」を皆が同じような状況をイメージできるようにと、（図１：内接正多角形は赤色、外接正多角形は青色で描かれた図を書画カメラによりスクリーンに投影）によって、円に「内接する」正多角形と「外接する」正多角形とはどのような状況の図形であるかを感覚的に理解させる。「円周の長さは、その円の内部にある正多角形の周の長さより長く、その円を内部に含む正多角形の周の長さよりは短い。」を「円周の長さは、その円に内接する正多角形の周の長さより長く、その円に外接する正多角形の周の長さより短い・」と言い換えて、このことはいつでも成り立つことだと約束して、今日の課題を書く。



（図１）

課題：半径１の円に内接する正四角形、外接する正四角形から始めて辺の数を２倍、２倍と増やしたときの正多角形の周の長さを表にした。この表を基にして、半径１の「円の周の長さ（円周の長さ）」を予想しよう。

辺の個数が64までの表【表１】を配布し、併せて書画カメラでこの表を投影する。

【表１】

正多角形の辺の個数ｎ	半径１の円の内接正ｎ角形の周の長さ	半径１の円の外接正ｎ角形の周の長さ
4	5.656854249	8.000000000
8	6.122934918	6.627416998
16	6.242890305	6.365195756
32	6.273096981	6.303449815
64	6.280662314	6.288236770

この表を良く見てください。半径１の円の内接正ｎ角形の周の長さは、ｎが大きくなるにつれて、どのようになっていますか？

生徒に答えさせる。

次に、外接正ｎ角形の周の長さは、ｎが大きくなるにつれて、どのようになっていますか？

生徒に答えさせる。

そうですね、辺の個数が大きくなるにつれて、内接正多角形の周の長さの値は大きくなり外接正多角形の周の長さの値は小さくなっていき、外接正ｎ角形の周の長さと内接正ｎ角形の周の長さの値の差は小さくなっていくことがわかりますね。

それでは、先ほど約束したことを確認します。「円周の長さは、その円に内接する正多角形の周の長さより長く、その円に外接する正多角形の周の長さより短い。」

さて、それではこの資料から半径が１の円の円周の長さはいくらだと予想できますか。少し時間を取りますから考えて下さい。（机間指導をしながら、考えを発表させる生徒を確認する。最後の正64角形の場合を考えれば良いことに気づかせるよう指導する。）

「 内接正64角形の周の長さと外接正64角形の周の長さとの平均値をもって、円の周の長さと予想する 」

生徒がほとんどであろう。

平均値は　6.284449542

その他の予想は書き留める程度にしておく。

それでは次に、辺の個数が256までの表【表２】を

【表２】

正多角形の辺の個数ｎ	半径１の円の内接正ｎ角形の周の長さ	半径１の円の外接正ｎ角形の周の長さ
4	5.656854249	8.000000000
8	6.122934918	6.627416998
16	6.242890305	6.365195756
32	6.273096981	6.303449815
64	6.280662314	6.288236770
128	6.282554502	6.284447260
256	6.283027602	6.283500738

配布します。（書画カメラを用いて投影する。）

表を見ると、内接正ｎ角形の周の長さは、ｎが大きくなるにつれて、長くなり、外接正ｎ角形の周の長さは、ｎが大きくなるにつれて、短くなっていることに気がつきますね。それでは、先ほどと同じ考えで、この資料から円の周の長さを予想してみると（教師が平均値を計算する）

平均値は　6.283264170

です。先ほど予想した値と違っていますね。最初の値と比べてどうなっていますか？

生徒に答えさせる。

それでは、最後に辺の個数が8192までの表【表３】を配布します。（書画カメラで投影する。）

【表３】

正多角形の辺の個数ｎ	半径１の円の内接正ｎ角形の周の長さ	半径１の円の外接正ｎ角形の周の長さ
4	5.656854249	8.000000000
8	6.122934918	6.627416998
16	6.242890305	6.365195756
32	6.273096981	6.303449815
64	6.280662314	6.288236770
128	6.282554502	6.284447260
256	6.283027602	6.283500738
512	6.283145881	6.283264161
1024	6.283175451	6.283205020
2048	6.283182843	6.283190235
4096	6.283184691	6.283186539
8192	6.283185153	6.283185617

この表を基にして、円の円周の長さを予想して欲しいと思いますが、「平均値」以外の考え方ができないかも込めて、グループで意見を出し合って、考えをまとめて下さい。（机間指導をしながら、考えを発表させるグループを確認する。）平均値は　6.283185385 を採用することができますが、少し違った視点で「近似値」を考えることができます。

それは、内接正8192角形の周の長さの値と外接正8192角形の周の長さの値で小数点以下の数字が一致する桁のところまでの数値6.283185を円の周の長さの近似値とすることです。表３によると、半径１の円の周の長さは、小数点以下６桁までは正しい値であることがわかりますから、これを近似値とすることもできるのです。

以上をまとめると、二つの数の間にある数の近似値を予想する方法として

⑴　二つの数の平均値を採用する。

⑵　二つの数の差が小さいときには、二つの数の数字が一致している桁数までの数を採用する。

の二つがあり、それぞれの場合によって使い分けることができます。ただし、その近似値はどちらの方法に依ったものかをきっちりとさせることが大切です。

半径１の円の周の長さの二つの近似値

⑴　6.283185385

⑵　6.283185

の半分の値を求めてみると

⑴のとき：3.1415926925

⑵のとき：3.141592

となります。これらは円周率の近似値だということを最後に注意しておく。資料として円周率の小数点以下1000桁までの正しい値を印刷したプリント（図２：日

円周率　π（1000 桁）

π＝3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899
86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502
84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196 44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165
27120 19091 45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273 72458 70066 06315 58817
48815 20920 96282 92540 91715 36436 78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094
33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548 07446 23799 62749 56735 18857 52724
89122 79381 83011 94912 98336 73362 44065 66430 86021 39494 63952 24737 19070 21798 60943 70277
05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694 05132 00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091
73637 17872 14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235 42019 95611 21290 21960
86403 44181 59813 62977 47713 09960 51870 72113 49999 99837 29780 49951 05973 17328 16096 31859
50244 59455 34690 83026 42522 30825 33446 85035 26193 11881 71010 00313 78387 52886 58753 32083
81420 61717 76691 47303 59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778 18577 80532
17122 68066 13001 92787 66111 95909 21642 01989

【図２】

本数学会（1985）、1434ページより抜粋コピー）を配布する。

3．中学校第一学年「資料の活用」の指導案（略案）

中学校第一学年「D 資料の活用」の指導計画全13時間のうち１時間を上の構想を受けた授業を当てることとし、実施可能な授業を12／13時と計画した。そして、50分授業1回分の指導案を作成した。通常用いる資料は日常生活に関わる統計的な資料の場合が多いと思われるが、ここで用いる資料は「数学」に内在している資料、すなわち、日常生活と直接関わりない資料である。このような資料の活用例は少ないように思われる。

以下に指導案を示す。試行授業を試みたところ、50分という時間設定には多少余裕がないことがわかった。学年の最後の時期に２回分の授業として設定することは難しいところがあるので、さらなる精選が必要であると思っている。

第１学年　「資料の活用」指導計画案

指導計画（全13時間　本時　12／13時）

時	主な指導内容	指導上の留意点
1	・単元の導入 ・ヒストグラムの意味	・生活に関連した教材「フライドポテト」を用い、２社のフライドポテトの特徴を調べさせる。 ・教師が整理したヒストグラムを提示し、様々な特徴を読み取らせ説明し合う活動に重点をおく。 ・読み取りや説明する活動を十分にさせ、それを基にヒストグラムの必要性を理解させ、今後の学習への意欲付けを図る。
2	・度数分布表、度数折れ線の意味	・クラス対抗リレーにおいて、クラス40人を２チームに分けるというイメージしやすい問題場面を設定する。 ・度数分布表やヒストグラム・度数折れ線を実際に描かせ、その意味を納得させたり、作成の仕方を理解させる。 ・整理した表やグラフの読み取らせを行い、整理の仕方によってどんなことが把握しやすくなるかについても確認する。
1	・範囲の意味とその求め方	・50m走の記録を出席番号の奇数と偶数で２つに分け、その分布のようすをいろいろな見方で比べる活動を通して範囲の意味とその求め方を理解させる。
1	・代表値の意味 ・平均値の意味とその求め方	・前時の度数分布表から平均値を求める方法を理解させ、電卓を用いて平均値を求めさせる。 ・仮の平均値を基にして平均値を求めさせる際には，小学校の学習内容を想起させながら導き出させる。さらに正の数・負の数を学んだよさにも触れる。
1	・中央値、最頻値の意味とその求め方	・前時の資料を利用して平均値以外の代表値である中央値や最頻値を理解させる。 ・平均値・中央値・最頻値の３つの代表値を用いて総合的にチームの特徴を説明させるようにする。
1	・相対度数	・クラスの男子と学年の男子という２つの資料を提示し、それぞれの資料の総数が異なるものを比べる場合、割合にすればよいという考えをしっかり共有する。 ・相対度数を求める際には電卓を使用させる。
1	・いろいろな問題	・「生活のリズムを見直そう」というテーマで、自分たちの睡眠時間の記録を調べる活動を通して、単元で学んだ内容を活用できるようにする。
1	・近似値、有効数字の意味	・四捨五入して得られる除法の計算結果を用いて、近似値・誤差・有効数字の意味を理解させる。
1	・有効数字を用いた近似値の表し方	・品物の重さを計る場面図を提示し、有効数字を判断させて近似値の表し方を理解させる。
1	・円周の長さの求め方	・アルキメデスによる円周の長さを求める方法を簡潔に紹介し、課題に興味をもたせる。 ・内接正多角形と外接正多角形の辺の数を増やしていったときの周の長さの資料を提示し、近似値を用いて円周の長さを予想させる。 ・近似値の有用性を味わわせる。

1	・単元のまとめ	・章末問題を利用して、単元の学習について自己評価や振り返りをさせる。

第１学年　数学科学習指導案

【本時の主題】　円周の長さの求め方

【本時のねらい】半径１の円の内接正多角形と外接正多角形の周の長さの近似値の表を利用して、半径１の円の円周の長さの近似値を予想すること。

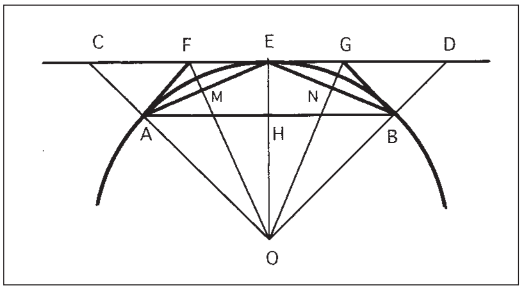
【指導過程】

教師の働き掛け	予想される生徒の反応	指導上の留意点・評価
1　円に関わる歴史を解説し、昔の人々がどのようにして円周の長さを求めたかに興味をもたせる。	1 ・昔の人々は円周の長さをどのようにして求めたのか、また円周率はいつ発見されたかについて興味をもつ。	1 ・月の写真を提示し、円に関する歴史について簡潔に紹介し、円周の長さや円周率の求め方に興味をもたせる。
2　昔の人々が正多角形の周の長さを用いて円周の長さを求めたことを理解させる。	2 ・かなり大変な作業だったことを想像する。 ・多角形の辺の数が増えると多角形は円に近づくことに納得する。	2 ・「円周の長さは内接正多角形の周の長さより長く、外接正多角形の周の長さより短い。」このことを利用して円周の長さが考えられることを、図を提示して直観的に理解させる。
3　課題提示 次の表をもとにして、半径１の円の円周の長さを予想してみよう。 （前出の【表１】を黒板に提示）	3 ・多角形の辺の数が増えると、 →内接正多角形の周の長さは長くなり、外接正多角形の周の長さは短くなる。 →２つの周の長さの差は縮まっていく。	3 ・表の見方について確認する。 ・多角形の辺の数が増えると、内接正多角形・外接正多角形の周の長さはそれぞれどうなっているかを確認する。
4　表をもとにして円周の長さがいくらになるか個人毎に考えさせる。	4 ㋐ｎ＝64の場合だけからだいたいを予想する。 →6.28 (ｲ)ｎ＝64のときの内接・外接正多角形の周の長さの平均値を求める。 →6.284449542くらいになる。 ㋒それぞれの辺の数の場合の平均値を求め、さらにその平均値を求める。	4 ・どのように考えたかがわかるように、自分の考えをノートにまとめさせる。 ・平均値を求めるときには電卓を使用してもよいことを確認する。 ・机間指導で生徒の考えを把握する。 ・悩んでいる生徒には「ｎ＝64の場合がより円周の長さに近いと考えられないか」と助言する。
5　個人毎の考えを発表させる。	5 ・ｎ＝64のときの平均値が正しい値に近いと考えられる。 ・だいたいの長さを予想するには平均値を求めればよい。	5 ㋐～㋒の順に発表させ、比較検討させる。
6　辺の数をさらに増やすと、円周の長さの近似値はどうなるのか予想を全体交流の中で考えさせる。	6 ・6.284449542より小さくなる。（㋒の考えから） ・6.28よりは大きい。（表や５の発表から） ・6.28までは同じである。（表から有効数字を考えてみたから）	6 ・表や５で示された考え方をもとに、考えの根拠についても説明させる。 ・求めている円周の長さは近似値であることを確認し、近似値を求めることは「平均値を求めること」と「有効数字を考え、求めること」の２つがあることを理解させる。
7　正8192角形までの表（前出の【表３】）を提示し、６での予想について検討をする。	7 ・ｎ＝8192の場合の ㋐平均値を求める。 →6.283185385 ㋑有効数字の考え方から求める。 →6.283185	7 ・ｎ＝8192の場合の値から「平均値を求めること」と「有効数字を考え、求めること」を指示する。 ・６で予想した数値と比較させる。

8　全員に対して発表させる。	8 ・ほぼ予想した通りの値であることを確認する。	8 ・㋐、㋑どちらの考えも発表させ、それぞれの方法は妥当であることを理解させる。
9　㋐、㋑それぞれを直径の長さ２で割った値を求めさせ、円周率の近似値について理解させる。	9 ・２で割った値が「円周率」として知っている値にほぼ近いことに気づく。 ㋐　3.1415926925 ㋑　3.1415925	9 ・円周率の求め方を確認する。 ・1000桁までの円周率の値を提示（前出）する。
10　本時を振り返させる。	10 ・円周率の値の求め方がわかった。 ・昔の人の計算力のすごさを認識する。 ・数学の一つ一つの結果は、多くの努力のもとに発見させたことがわかったので、大切にしたい。	10 ・わかったこと、なるほどと思ったこと、疑問に思ったことを学習メモに記述させる。

４．中学校第三学年と高等学校で取り扱う「内接（外接）正多角形の辺の長さ

点Ｏを中心とする円Ｏに内接する正ｎ角形の一辺をＡＢとする。線分ＡＢの中点を Ｈ とする。半直線ＯＨと円Ｏとの交点をＥとし、点Ｅにおける円Ｏの接線を引き、この接線と半直線ＯＡ、ＯＢとの交点をそれぞれＣ、Ｄとする。このとき線分ＣＤは円Ｏに外接する正ｎ角形の一辺である。線分ＡＥとＢＥは円Ｏに内接する正２ｎ角形の辺である。線分ＡＥの中点をＭとし、半直線ＯＭと直線ＣＤとの交点をＦとする。線分ＢＥの中点をＮとし、半直線ＯＮと直線ＣＤとの交点をＧとする。（図３）を参照。



（図３）

このとき

⑴　上の（図３）において

・三角形ＡＯＦと三角形ＥＯＥが合同であることを示せ。

・∠FAC が直角であることを示せ。

は中学校第二学年の課題となる。

㊟　このことより、線分ＦＧは円Ｋに外接する正２ｎ角形の一辺であることがわかる。

⑵　上の（図３）に描かれている種々の多角形の内から、

・合同である図形を求める。

・線対称である図形を求める。

・平行移動で移り合う図形を求める。

・回転で移り合う図形を求める。

・相似である図形を求める。

という活動が中学校で可能である。

⑶　半径ｒの円に内接する正ｎ角形の一辺の長さをａ、同様に、外接する正ｎ角形の一辺の長さをｂ　とする。すなわち、ＯＡ＝ＯＢ＝ＯＥ＝ｒ、ＡＢ＝ａ、ＣＤ＝ｂである。このとき、「ａとｂの間にはどのような関係式が成り立つのか考えよう」という課題を中学校第三学年で取り扱うことが可能である。三角形の相似を用いて解決する課題である。「ａとｂの間に成り立つ関係式」は

$$b=(r\times a)/\sqrt{r^2-(a/2)^2}$$

である。（注 $\dfrac{a}{2}$：を$a/2$と表記する。）

⑷　半径ｒの円に内接する正ｎ角形の一辺の長さをａ、同様に、正２ｎ角形の一辺の長さをａ’とする。すなわち、ＯＡ＝ＯＢ＝ＯＥ＝ｒ、ＡＢ＝ａ、ＡＥ＝ＢＥ＝ａ’である。このとき、「ａとａ’の間にはどのような関係式が成り立つのか考えよう」という課題は高等学校「数学Ａ」（文部科学省（2009））で取り扱うことも可能である。ただし、関係式は二重根号を用いて表示される。「ａとａ’の間に成り立つ関係式」は

$$a'=\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-(a/2)^2}}$$

あるいは、両辺を２乗し、両辺に２を乗じて、さらに右辺に有理化を行い整理すると

$$2(a')^2=(r\times a^2)/\left(r+\sqrt{r^2-(a/2)^2}\right)$$

である。

三角形ＡＢＥにおいてＡＢ＜ＡＥ＋ＥＢが成り立つことより、ａ＜２ａ’が成り立つことも注意すべき点である。

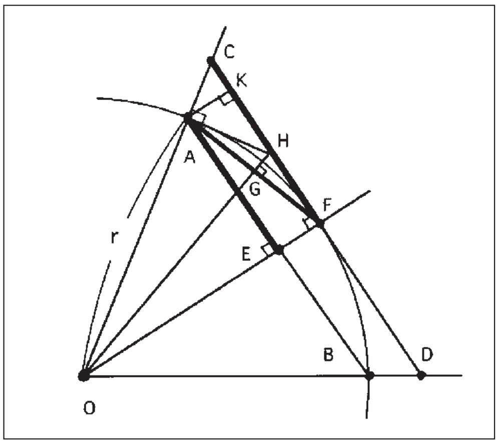
⑸　半径ｒの円に内接する正2×2^n角形の一辺の長さをa_nとすると周の長さは$A_n=2\times 2^n\times a_n$であり、半径ｒの円に外接する正$2\times 2^n$角形の一辺の長さを$b_n$とすると周の長さは$B_n=2\times 2^n\times b_n$である（ｎ＝１、２、３、………）。このとき、三角形ＣＡＦは∠ＣＡＦが直角であるからＡＦ＜ＣＦが成り立つ。よって、ＡＦ＋ＦＥ＜ＣＥ、すなわち、２ＦＧ＜ＣＤとなるから$2b_{n+1}<b_n$が成り立つ。よって、ａ＜２ａ’と$2b_{n+1}<b_n$が各ｎに対して成り立つことより、

$A_n<A_{n+1}$そして$B_{n+1}<B_n$

が成り立つ。さらにｎ→∞のとき（B_n-A_n）→０が成り立つ。単調増加数列｛A_n｝は収束し、単調減少数列｛B_n｝も収束し、これらの極限値は一致する（実はこの極限値は半径ｒの円の周の長さの値である）。これらの事柄は大学初年の数学の講義の内容である。（「正2×2^n角形」は正方形、正八角形、………の場合である。もし、正六角形、正十二角形、………の場合には「正3×2^n角形」と修正することになる。）

５．円に内接する正多角形と外接する正多角形の周の長さの関係式

中心が点Ｏで半径ｒの円（円Ｏと表す）に内接する正ｎ角形の一辺が弦ＡＢで、外接する正ｎ角形の一辺が線分ＣＤであるとする（図４を参照）。点ＥとＦはそれぞれ線分ＡＢとＣＤの中点で、点Ｆは線分ＣＤと円Ｏとの接点である。そして、直線ＯＦは線分ＡＢと線分ＣＤそれぞれの垂直二等分線である。よって、線分ＡＦは円Ｏに内接する正２ｎ角形の一辺である。線分ＡＦの中点をＧとすると直線ＯＧは線分ＡＦの垂直二等分線である。直線ＯＧと線分ＣＦとの交点をＨとすると、ＡＨ＝ＨＦであり、線分ＨＦ（あるいは、線分ＡＨ）の長さは円Ｏに外接する正２ｎ角形の一辺の半分の長さに等しい。さらに、点Ａを通り線分ＣＦに垂直である直線を引き、この直線と線分ＣＦとの交点をＫとする。



（図４）

このとき、円Ｏの内接正ｎ角形の一辺の長さをａ、内接正２ｎ角形の一辺の長さをａ’、外接正ｎ角形の一辺の長さをｂとし、外接正２ｎ角形の一辺の長さをｂ’とすると、

ＡＥ＝ａ／２、ＣＦ＝ｂ／２、ＡＦ＝ａ’、
ＡＨ＝ＨＦ＝ｂ’／２

であり、∠ＯＥＡ、∠ＦＥＡ、∠ＯＦＣ、∠ＨＧＦ、∠ＣＡＨ、∠ＡＫＣなどはその大きさが直角（90度）の角である。

円Ｏの内接正ｎ角形の周の長さをＡ（ｎ）、内接正２ｎ角形の周の長さをＡ（２ｎ）、外接正ｎ角形の周の長さをＢ（ｎ）、外接正２ｎ角形の周の長さをＢ（２ｎ）とする（先のセクション４の⑸と表記を変えている）。すると、

Ａ（ｎ）＝ｎ×ａ、Ａ（２ｎ）＝２ｎ×ａ’
Ｂ（ｎ）＝ｎ×ｂ、Ｂ（２ｎ）＝２ｎ×ｂ’

である。このとき、

$$B(2n)=[2\times A(n)\times B(n)]/[A(n)+B(n)]$$
$$[A(2n)]^2=A(n)\times B(2n)$$

が成り立つことが知られている（小林（1999）、日本数学会（1985）参照）。第二の等式は、三角形ＦＥＡと三角形ＨＧＦが相似であることより容易に示される。ここでは、第一の等式を三平方の定理を用いて証明されることを紹介する。

（第一の等式の証明）：三角形ＡＨＣは直角三角形であるから、三平方の定理より$HC^2=AH^2+AC^2$が成り立つ。ところで、ＨＣ＝ＦＣ－ＦＨ＝(ｂ/２)－(ｂ’/２)、ＡＨ＝ｂ’/２であるから

①　$[(b/2)-(b'/2)]^2=(b'/2)^2+AC^2$

が成り立つ。また、三角形ＡＫＣは直角三角形であ

るから、三平方の定理より$AC^2=KA^2+KC^2$が成り立つ。ところで、$KC=FC-EA=(b/2)-(a/2)$であるから

② $AC^2=KA^2+[(b/2)-(a/2)]^2$

が成り立つ。さらに、三角形ＨＫＡは直角三角形であるから、三平方の定理より$AH^2=KH^2+KA^2$が成り立つ。ところで、$AH=b'/2$、$KH=FK-FH=EA-FH=(a/2)-(b'/2)$であるから

③ $(b'/2)^2=[(a/2)-(b'/2)]^2+KA^2$

が成り立つ。式①より

$$AC^2=(b^2/4)-(b\times b'/2)$$

また、式③より

$$KA^2=(a\times b'/2)-(a^2/4)$$

が得られるから、これら二つの式を②に代入すると

$$(b^2/4)-(b\times b'/2)$$
$$=(a\times b'/2)-(a^2/4)+[(b/2)-(a/2)]^2$$

となる。この式を整理すると

$$b'=[a\times b]/[a+b]$$

が得られる。上式の両辺に２ｎを乗じ、さらに右辺の分子分母にｎを乗じると

$$2nb'=[2\times(n\times a)\times(n\times b)]/[(n\times a)+(n\times b)]$$

となる。すなわち

$$B(2n)=[2\times A(n)\times B(n)]/[A(n)+B(n)]$$

が得られる。（証明おわり）

以上の証明でわかるように、内接正多角形と外接正多角形の周の長さの関係は、（図４）を提示することにより、中学校第三学年でも取り扱うことが可能であると思われる。

６．アルキメデスによる円周の長さ

円周の長さに関して、アルキメデスはどのようにとらえていたのかを佐藤徹の訳・訳注（1981）による「アルキメデス『球と円柱について　第一巻』」を基にして見てみることにする。必要な箇所を拾い上げることにし、他の部分は省略する。

303ページには次のような記述がある：

「最初に定義と、証明に必要な仮定とを述べます。

定義１

平面上に次のようなある有限曲線が存在する。すなわち、その両端を結ぶ線分に関して、その曲線全体が同一の側にあるか、または、反対側にはその部分が全くないような有限曲線が存在する。

定義２

つぎのような線を同じ向きに凹であると私は呼ぶ。すなわち、その上の任意の二点が取られたとき、それらの点を結ぶ線分がすべてその曲線の同一側にくるか、または、ある部分は同一の側に来、ほかの部分はその曲線上にあるが、けっして曲線の反対側にはこないような場合である。」

ここに、「有限曲線」とは平面上の「有界領域内にある曲線」の意味であり、まだ「長さ」について言及していないので「長さが有限である」という意味にとらえなくとも良いと思う。アルキメデスは何を平面上の曲線と呼んでいるかについて、このページの下部にある「エウトキオス『定義』に対する注釈」は

「………彼が曲線と呼ぶものは、単に円形曲線や円錐曲線や折れていない連続線だけではなくて、直線を除いた単一のすべての線、………（略）………のように、線分（と円弧）からできる線のような、何らかの方法で平面上に作られた一つの線も曲線と言っているのである。」

と記述している。この「曲線」は、小学生や中学生が理解しているであろう曲線と大きな差違はないように思う。そして、続く**定義３**と**定義４**は曲面に関するもの、**定義５**と**定義６**は立体図形（円錐）に関わるもの、であるので省略する。

次に、306ページには

「 私は以下のことを仮定する。

仮定１

同じ両端を持つ線のうち、直線が最小である。

仮定２

一平面上にあり同じ両端を持つ直線以外の線のうち、次のようなものは不等である。すなわち、両端が同じ向きに凹であり、一方の曲線全部が、それと同じ両端を持つ他方の曲線と両端を結ぶ線分に囲まれるか、または、ある部分が囲まれ、ある部分は共通である場合である。そして囲まれるほうがより小さい。」

との記述がある。ここで、「不等である」とは、それぞれの曲線の「長さが等しくない」ことを意味する。**仮定３**、**仮定４**、**仮定５**は省略する。312ページの「訳者『仮定』への註」によると、仮定５は「アルキメデスの公理」と呼ばれるものであり、「取り尽しの方法」の基礎になっている。

ついで、以下のページで「命題」の主張とその証明が記述され、図と要約も与えられている。すなわち、313ページには

「**命題１**

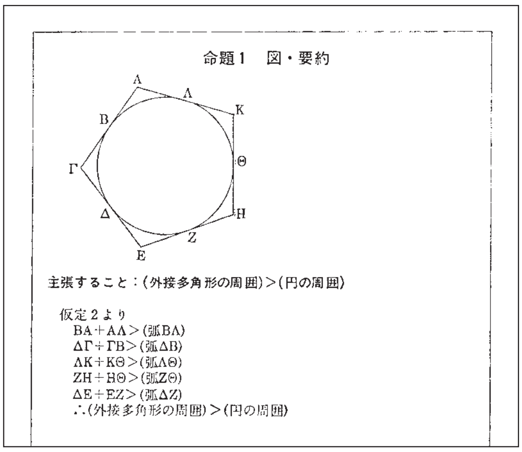
もし多角形が円の周りに外接されると、外接多角形の周は円の周囲より大きい。

図のように多角形が円の周りに外接されたとせよ。

その多角形の周囲は円の周囲より大きいと主張する。

同じ限界を持つ弧を囲むので、線分ＢΑ、ΑΛの和は、弧ＢΛより大きい。同様に、線分ΔΓ、ΓＢの和は、弧ΔＢより大きく、線分ΛＫ、ＫΘの和は、弧ΛΘより大きく、線分ＺＨ、ＨΘの和は、弧ＺΘより大きく、そして線分ΔＥ、ＥＺの和は、弧ΔＺより大きい。それゆえ多角形の全周囲は円の周囲より大きい。」

上記後半４行は命題１の主張を証明している部分である。そして、（図５）は314ページで与えられている図の上半分である（下半分は空白である）。



（図５）

もちろん、この証明は現在の数学の視点では証明ではなく、「ある具体例での説明」である。しかしながら、中学生に対しては充分に説得力をもつ説明であると思う。

以下、**命題２**と**命題３**の主張のみを記すことにする。

「**命題２**

二つの不等な量が与えられているとき、より大きな線分がより小さな線分に対して、より大きな量がより小さな量に対するよりも小さな比を持つように、二つの不等な線分を見出すことができる。」（315ページ）

「**命題３**

二つの不等な量と円が与えられているとき、外接多角形の辺が内接多角形の辺に対して、より大きな量がより小さな量に対するよりも小さな比を持つように、円に多角形を内接させ、別の多角形を外接させることができる。」（320ページ）

７．おわりに

中学校・高等学校の教員が「円周の長さ」の研究・実践授業を行うに際し、前著（萬　他、2008）の「おわりに」で紹介した書籍・論文に加えて、小林（1999）の一読を勧めたい。中学校・高等学校の教員と教員志望の学生に向けた丁寧な説明がなされ、豊富な話題が記述されている書籍である。

我々が提示した指導案は、試行的に行った授業の結果、50分授業としては無理があり、改善とそれを基にした授業実践とその記録作成を行わなければいけないと考えている。例えば、表の提示を一回にして授業を進めることなどを考えなければならないであろう。また、試験的に行った授業では内接正ｎ多角形の周の長さと外接正ｎ多角形の周の長さの平均値をもとめた生徒がほとんどで、それら二つの数値の一致する桁までを近似値とするという発想に近い考えをした生徒が一名いた。前時に近似値・誤差・有効数字などの説明をしていたが、有効数字・有効桁の理解は十分でなかったようである。

文　献

・小林昭七（1999）：円の数学、裳華房。

・佐藤徹　訳・訳註（1981）：第Ⅲ部　アルキメデス『球と円柱について　第一巻』、（伊藤俊太郎　編集；「科学の名著９　アルキメデス」）、朝日出版社、300－481.

・竹之内脩（2008）：和算における円周率、数理科学、542、24－28.

・文部科学省（2008）：中学校学習指導要領解説　数学編。

・文部科学省（2009）：高等学校学習指導要領解説　数学編理数編。

・日本数学会　編集（1985）：岩波　数学辞典　第３版、岩波書店。

・萬伸介、森岡正臣、西城祐子、山尾健一、小畑達哉（2008）：

円周の長さについて(I)——林鶴一蔵書資料より——、
宮城教育大学紀要、43、61－70.

（平成22年９月30日受理）