研究ノート

一般の累乗和の公式の導出について

*佐　藤　得　志

要　旨

自然数の累乗和の公式については，累乗の指数が３以下の場合には高等学校の「数学B」においても扱われる．本稿においては，これを一般の指数に拡張した場合の累乗和の公式について，原理的には高校生や大学生でも理解できるような素朴な方法で，その導出方法について解説する．そのために，２種類の添数に関する実数の和の順序交換に関する性質を用いるが，これについても解説する．

Key words：累乗和、有限集合、実数の有限和、実数の和の順序交換

1. 序

実数全体の集合を $\mathbf{R}$ とし, 自然数全体, 整数全体, 有理数全体の集合をそれぞれ

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$
$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$
$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbf{R} \;\middle|\; m \in \mathbf{Z},\, n \in \mathbf{N} \right\} (\subset \mathbf{R})$$

と表す. また, $m, n \in \mathbf{Z}$, $m \leq n$ に対し,

$$\mathbf{N}_m = \mathbf{Z} \cap [m, \infty) = \{ i \in \mathbf{Z} \mid i \geq m \},$$
$$\mathbf{N}_{m,n} = \mathbf{Z} \cap [m, n] = \{ i \in \mathbf{Z} \mid m \leq i \leq n \},$$
$$\mathbf{N}_{m,m-1} = \phi\, (\subset \mathbf{Z})$$

と表すことにする.

本稿においては, $m \in \mathbf{N}_0$ に対して自然数の m 乗和を

$$S_n^{(m)} = \sum_{j \in \mathbf{N}_{1,n}} j^m = \sum_{j=1}^{n} j^m = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (n-1)^m + n^m \quad (\in \mathbf{N}) \quad \text{for } n \in \mathbf{N}$$

と表すこととし, その具体的な表示式 (公式) の導出の方法について解説する.

公式集 [5] においては, $0 \leq m \leq 7$ に対して具体的に m 乗和の公式が明示されていて, 一般の $m \in \mathbf{N}$ に対しても Bernoulli の多項式 (及び Bernoulli 数) を用いた公式の一般形が与えられている. 高等学校の「数学 B」においては, $0 \leq m \leq 3$ の場合にこれらの和の公式が扱われているが, そこでは一般の $m \in \mathbf{N}$ に対する和の公式がどのように表されるかについては触れられてはおらず, これに関して疑問を持つような高校生もいるかもしれない. その一般的な導出方法については, Bernoulli の多項式を用いた方法 ([1] 等) や微分, 差分を用いた方法等, いくつかの方法が知られているが, 本稿においては, より素朴に, 原理的には高校生や大学生でも理解できるような方法で, これを考察することにする.

まず, $m = 0, 1$ の場合について確認しておく. $m = 0$ のときには, 次が成り立つ.

例 1.1. $m = 0$ のとき,

$$S_n^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} j^0 = \sum_{j=1}^{n} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 = n \quad \text{for } n \in \mathbf{N}. \qquad \square$$

$m = 1$ のとき,「数学 B」においては, 通常は等差数列の和の公式の特別な場合として扱われるのであるが, 次のようにして公式を導くこともできる.

例 1.2. $m = 1$ のとき.

(i)
$$\sum_{j=1}^{n} (j^2 - (j-1)^2) = (n^2 - (n-1)^2) + ((n-1)^2 - (n-2)^2) + ((n-2)^2 - (n-3)^2) + \cdots + (2^2 - 1^2) + (1^2 - 0^2) = n^2 - 0^2 = n^2 \quad \text{for } n \in \mathbf{N}$$

であるから, 例 1.1 を用いると,

＊　宮城教育大学教育学部 教科内容学域 理数・生活科学部門 解析学

$$\begin{aligned} n^2 &= \sum_{j=1}^{n}(j^2-(j-1)^2) = \sum_{j=1}^{n}(2j-1) \\ &= 2\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} 1 = 2S_n^{(1)} - S_n^{(0)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &= \frac{1}{2}(n^2+S_n^{(0)}) = \frac{1}{2}(n^2+n) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \quad \text{for } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

が得られる.

(ii)
$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n}((j+1)^2-j^2) \\ &= ((n+1)^2-n^2)+(n^2-(n-1)^2) \\ &\quad +((n-1)^2-(n-2)^2)+\cdots \\ &\quad +(3^2-2^2)+(2^2-1^2) \\ &= (n+1)^2-1^2 = n^2+2n \quad \text{for } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

であるから, 例 1.1 を用いると,

$$\begin{aligned} n^2+2n &= \sum_{j=1}^{n}((j+1)^2-j^2) = \sum_{j=1}^{n}(2j+1) \\ &= 2\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1 = 2S_n^{(1)} + S_n^{(0)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &= \frac{1}{2}(n^2+2n-S_n^{(0)}) \\ &= \frac{1}{2}(n^2+2n-n) = \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \quad \text{for } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

が得られる. □

「数学 B」においては, 例 1.2 (ii) と同様の方法を用いて $m = 2, 3$ に対する和の公式が導かれる ([2, 3, 4, 8]).

例 1.3. (i) $m = 2$ のとき,

$$\begin{aligned} S_n^{(2)} &= \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \quad \text{for } n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

(ii) $m = 3$ のとき,

$$\begin{aligned} S_n^{(3)} &= \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \quad \text{for } n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$ □

実は, この方法は一般の $m \in \mathbf{N}$ に対する m 乗和の公式を導く方法を得るための示唆を与えている. 実際, $m-1$ 以下のすべての l に対して l 乗和の公式が得られていることを前提とし, 二項定理を用いると, 例 1.2 と同様の方法によって一般的に次の命題 1.1 が成り立つことが分かる. ここで,

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}\,(\in \mathbf{N}) \quad \text{for } k, m \in \mathbf{N}_0,\ k \leq m$$

は二項係数を表す.

命題 1.1. $m \in \mathbf{N}$ とすると,

$$\begin{aligned} S_n^{(m)} &= \frac{1}{m+1}\Big\{n^{m+1} - \sum_{l \in \mathbf{N}_{0,m-1}} (-1)^{m-l}\binom{m+1}{l} S_n^{(l)}\Big\} \\ &= \frac{1}{m+1}\Big\{(n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{l \in \mathbf{N}_{0,m-1}} \binom{m+1}{l} S_n^{(l)}\Big\} \\ &\qquad \text{for } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

が成り立つ. □

従って, $m-1$ 以下のすべての l に対して l 乗和の公式が得られれば, m 乗和の公式が得られる. これをもう少し洗練すると, 次の定理 1.1 が成り立ち, m が偶数 (または奇数) のときに, $m-2$ 以下のすべての偶数 (または奇数) $m-2j$ に対する和の公式が得られれば, m 乗和の公式が得られる. ここで,

$$\lfloor x \rfloor = \max(\mathbf{Z} \cap (-\infty, x])\,(\in \mathbf{Z}) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}$$

は x の整数部分 (i.e. x 以下の最大の整数) を表す.

定理 1.1. $m \in \mathbf{N}$ とすると,

$$\begin{aligned} S_n^{(m)} &= \frac{1}{m+1}\Big\{\frac{1}{2}((n+1)^{m+1} + n^{m+1} - 1) - \sum_{j \in \mathbf{N}_{1,\lfloor m/2 \rfloor}} \binom{m+1}{m-2j} S_n^{(m-2j)}\Big\} \\ &\qquad \text{for } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

が成り立つ. □

次に, $m \in \mathbf{N}$ を 1 つ与えたとき, $m-1$ 以下の l に対する l 乗和の公式を用いずに m 乗和の公式を導く方法について考える. このために, $S_n^{(m)}$ が n についての多項式となることを用いる. 実際, 命題 1.1 (または定理 1.1) から次が得られる.

命題 1.2. $m \in \mathbf{N}_0$ とすると,

$$\begin{aligned} S_n^{(m)} &= \sum_{k \in \mathbf{N}_{1,m+1}} c_k^{(m)} n^k \\ &= c_{m+1}^{(m)} n^{m+1} + c_m^{(m)} n^m + c_{m-1}^{(m)} n^{m-1} \\ &\quad + \cdots + c_2^{(m)} n^2 + c_1^{(m)} n \\ &\qquad \text{for } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

をみたすような (n に依存しない) $\{c_k^{(m)}\}_{k \in \mathbf{N}_{1,m+1}} \subset \mathbf{R}$ が一意的に存在する. □

従って, m 乗和の公式を導くためには, 命題 1.2 の表示式の係数 $\{c_k^{(m)}\}_{k \in \mathbf{N}_{1,m+1}}$ を決定すればよいことになる. 実際には,

$$\begin{aligned} S_n^{(m)} &= S_{n-1}^{(m)} + n^m && \text{for } n \in \mathbf{N}_2, \\ S_{n+1}^{(m)} &= S_n^{(m)} + (n+1)^m && \text{for } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

を用いると, 次の命題 1.3 が得られる. 従って, $k \in$

$\mathbf{N}_{1,m}$ に対応する係数 $c_k^{(m)}$ は, $k+1$ 以上の l に対応する係数 $c_l^{(m)}$ から定まることになるので, k が大きい方から順に係数 $c_k^{(m)}$ を決定できることが分かる. また, 二項係数はすべて自然数 (特に有理数) であるから, この表示式により, (k が大きい方から順に)

$$c_k^{(m)} \in \mathbf{Q} \quad \text{for } k \in \mathbf{N}_{1,m+1}$$

が成り立つことが分かる.

命題 1.3. $m \in \mathbf{N}$ とすると, 命題 1.2 において

$$\begin{aligned} c_{m+1}^{(m)} &= \frac{1}{m+1}, \\ c_k^{(m)} &= -\frac{1}{k} \sum_{l \in \mathbf{N}_{k+1,m+1}} (-1)^{l-k} \binom{l}{k-1} c_l^{(m)} \\ &= \frac{1}{k} \left(\binom{m}{k-1} - \sum_{l \in \mathbf{N}_{k+1,m+1}} \binom{l}{k-1} c_l^{(m)} \right) \\ &\qquad \text{for } k \in \mathbf{N}_{1,m} \end{aligned}$$

が成り立つ. 特に, $\{c_k^{(m)}\}_{k \in \mathbf{N}_{1,m+1}} \subset \mathbf{Q}$ である. □

次の命題 1.4 における表記においては, $k \in \mathbf{N}_{1,m-1}$ が偶数 (または奇数) のとき, この k に対応する係数 $c_k^{(m)}$ は $k+2$ 以上の偶数 (または奇数) $k+2j$ に対応する係数 $c_{k+2j}^{(m)}$ のみから定まることが分かる.

命題 1.4. $m \in \mathbf{N}_2$ とすると, 命題 1.2 において

$$\begin{aligned} c_{m+1}^{(m)} &= \frac{1}{m+1}, \ c_m^{(m)} = \frac{1}{2}, \\ c_k^{(m)} &= \frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{2} \binom{m}{k-1} \right. \\ &\qquad \left. - \sum_{j \in \mathbf{N}_{1,\lfloor (m-k+1)/2 \rfloor}} \binom{k+2j}{k-1} c_{k+2j}^{(m)} \right\} \\ &\qquad \text{for } k \in \mathbf{N}_{1,m-1} \end{aligned}$$

が成り立つ. □

更に, 命題 1.4 を精査すると, 次が得られる.

命題 1.5. (i) $m \in \mathbf{N}_2$ のとき, $l \in \mathbf{Z}$ に対して

$$m+1-2l \in \mathbf{N}_{1,m-1} \iff l \in \mathbf{N}_{1,\lfloor m/2 \rfloor}$$

であり,

$$\begin{aligned} c_{m+1-2l}^{(m)} &= \frac{1}{m+1-2l} \left\{ \frac{1}{2} \binom{m}{m-2l} \right. \\ &\qquad \left. - \sum_{i \in \mathbf{N}_{0,l-1}} \binom{m+1-2i}{m-2l} c_{m+1-2i}^{(m)} \right\} \\ &\qquad \text{for } l \in \mathbf{N}_{1,\lfloor m/2 \rfloor} \end{aligned}$$

が成り立つ.

(ii) $m \in \mathbf{N}_3$ のとき, $l \in \mathbf{Z}$ に対して

$$m-2l \in \mathbf{N}_{1,m-2} \iff l \in \mathbf{N}_{1,\lfloor (m-1)/2 \rfloor}$$

であり,

$$c_{m-2l}^{(m)} = 0 \quad \text{for } l \in \mathbf{N}_{1,\lfloor (m-1)/2 \rfloor}$$

が成り立つ. □

以上により, $m \in \mathbf{N}_3$ に対しては次のようにして係数 $\{c_k^{(m)}\}_{k \in \mathbf{N}_{1,m+1}}$ を計算できることが分かる.

定理 1.2. $m \in \mathbf{N}_3$ とすると, 命題 1.2 における係数 $\{c_k^{(m)}\}_{k \in \mathbf{N}_{1,m+1}} \subset \mathbf{Q}$ は (k が大きい方から順に)

$$\begin{aligned} & c_{m+1}^{(m)} = \frac{1}{m+1}, \ c_m^{(m)} = \frac{1}{2}, \\ & c_{m+1-2l}^{(m)} = \frac{1}{m+1-2l} \left\{ \frac{1}{2} \binom{m}{m-2l} \right. \\ &\qquad \left. - \sum_{i \in \mathbf{N}_{0,l-1}} \binom{m+1-2i}{m-2l} c_{m+1-2i}^{(m)} \right\} \\ &\qquad \text{for } l \in \mathbf{N}_{1,\lfloor m/2 \rfloor}, \\ & c_{m-2l}^{(m)} = 0 \qquad \text{for } l \in \mathbf{N}_{1,\lfloor (m-1)/2 \rfloor} \end{aligned}$$

によって定まり, これを用いて

$$\begin{aligned} S_n^{(m)} &= \sum_{k \in \mathbf{N}_{1,m+1}} c_k^{(m)} n^k \\ &= c_{m+1}^{(m)} n^{m+1} + c_m^{(m)} n^m \\ &\qquad + \sum_{l \in \mathbf{N}_{1,\lfloor m/2 \rfloor}} c_{m+1-2l}^{(m)} n^{m+1-2l} \quad \text{for } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

と表される. □

定理 1.2 (または命題 1.5) により, $l = 1, 2$ のとき, 係数 $c_{m+1-2l}^{(m)}$ は次によって与えられることが分かる.

例 1.4. (i) $\quad c_{m-1}^{(m)} = \dfrac{m}{12} \quad$ for $m \in \mathbf{N}_2$.

(ii) $c_{m-3}^{(m)} = -\dfrac{m(m-1)(m-2)}{720} \quad$ for $m \in \mathbf{N}_4$. □

これらの命題や定理を証明するためには, 2 種類の添数に関する実数の和の (添数に関する) 順序交換を用いた議論が必要となるが, 本稿においてはこれについても詳述することにする. 実際には, このような和の順序交換の性質を証明するために, 2 つの添数集合の直積集合の (有限) 部分集合を添数集合とする実数の和の概念を介在させて議論することになる. 本稿では, 一般の有限集合 Λ とこれを添数集合とする実数の集合

$$\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} = \{a_\lambda \in \mathbf{R} \mid \lambda \in \Lambda\} \, (\subset \mathbf{R})$$

に対し, その和

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \, (\in \mathbf{R})$$

を (適切に) 定義できることを示し (補題 3.1, 定義 3.3 参照), それに基いて議論を行うことにする. その際に, 有限集合や全単射に関する性質を用いることになるが, これらに関する事実は既知とする (例えば, [6] 参照). このとき, $m, n \in \mathbf{Z}$, $m \leq n$, $\{a_i\}_{i \in \mathbf{N}_{m,n}} \subset \mathbf{R}$ とすると, 結果的に

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_{m,n}} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i \,(\in \mathbf{R})$$

(右辺は定義 2.1 のもの) が成り立つことが分かる. その上で, 上述の命題や定理の証明を行うことにする. なお, ページ数の都合により, 具体的な計算例については述べないことにする.

本稿の内容は, 今年度の 6 月に仙台城南高等学校で開催された「宮城県私立中学高等学校数学教育研究会」での講演内容に基き, その証明を詳述し, 加筆したものである. また, 8 月に本学で開催された公開教員研修「算数·数学科における探求·探究的な学習」において, この話題に関連する演習課題を提供した.

2. 実数の有限和と和の順序交換

集合 Λ の冪集合 (i.e. Λ の部分集合全体の集合) を $\mathcal{P}(\Lambda)$ で表すことにする (従って,

$$\tilde{\Lambda} \in \mathcal{P}(\Lambda) \iff \tilde{\Lambda} \subset \Lambda$$

である). また, 集合 Λ, M に対し, Λ と M の直積集合を

$$\Lambda \times M = \{(\lambda, \mu) \mid \lambda \in \Lambda,\, \mu \in M\}$$

((λ, μ) は λ と μ の順序対) と表す. 更に, M から Λ への全単射全体の集合を $\mathcal{B}(M;\Lambda)$ と表し, Λ から Λ 自身への全単射全体の集合を $\mathcal{B}(\Lambda) = \mathcal{B}(\Lambda;\Lambda)$ と表すことにする.

注意 2.1. $\Lambda, M, N \neq \phi$ を集合とし, $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{P}(N)$ を (N の部分集合から成る) 集合族とする. このとき, $\alpha \in \mathcal{B}(M;\Lambda)$ とすると,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = \bigcup_{\mu \in M} N_{\alpha(\mu)} \,(\subset N)$$

が成り立つ. □

まず, 番号付けられた (有限個の) 実数の和 (の記号) を定義する.

定義 2.1. $m, n \in \mathbf{Z}$, $m \le n$ とするとき,

$$\{a_i\}_{i \in \mathbf{N}_{m,n}} = \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n-1}, a_n\} \subset \mathbf{R}$$

に対し,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n \quad (\in \mathbf{R})$$

と定義する. また, (形式的に)

$$\sum_{i=m}^{m-1} a_i = 0 \,(\in \mathbf{R})$$

と定義する. □

注意 2.2. $m \in \mathbf{Z}$, $a_m \in \mathbf{R}$ のとき, $\{a_i\}_{i \in \mathbf{N}_{m,m}} = \{a_m\} \subset \mathbf{R}$ であり,

$$\sum_{i=m}^{m} a_i = a_m \,(\in \mathbf{R})$$

が成り立つ. □

このとき, 次が成り立つことが分かるが, 証明は省略する.

命題 2.1. $m, n \in \mathbf{Z}$, $m \le n$ とし, $\{a_i\}_{i \in \mathbf{N}_{m,n}}$, $\{b_i\}_{i \in \mathbf{N}_{m,n}} \subset \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, 次が成り立つ.

(i)
$$\sum_{i=m}^{n} c a_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i,$$
$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i \,(\in \mathbf{R}).$$

(ii) $k \in \mathbf{N}_{m-1,n}$ とすると,
$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i \,(\in \mathbf{R}).$$

(iii) $l \in \mathbf{N}$, $\{m_k\}_{k \in \mathbf{N}_{0,l}} \subset \mathbf{Z}$, $m-1 = m_0 \le m_1 \le m_2 \le \cdots \le m_{l-1} \le m_l = n$ とすると,
$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n} a_i &= \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_i = \sum_{k=1}^{l} \Bigl(\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_i \Bigr) \\ &= \sum_{i=m_0+1}^{m_1} a_i + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} a_i + \cdots \\ &\qquad + \sum_{i=m_{l-1}+1}^{m_l} a_i \,(\in \mathbf{R}).\end{aligned}$$
□

また, 次が成り立つ.

補題 2.1. $m, n, k \in \mathbf{Z}$, $m \le n$ とし, $\{a_i\}_{i \in \mathbf{N}_{m,n}} \subset \mathbf{R}$ とすると,

$$i - k \in \mathbf{N}_{m,n} \quad \text{for } i \in \mathbf{N}_{m+k,n+k}$$

であり,

$$\sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k} = \sum_{i=m}^{n} a_i \,(\in \mathbf{R})$$

が成り立つ. □

次に, $n \in \mathbf{N}$ とし, $\mathbf{N}_{1,n}$ を添数集合とする (n 個の) 実数の集合 $\{a_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathbf{R}$ の和を考えるとき, これらの和の順序をどのように入れ替えたとしても, 勿論, その和の値は不変である. この事実は $\mathbf{N}_{1,n}$ の置換を用いて述べることができる. ここで, $\mathbf{N}_{1,n}$ の置換とは, n 次対称群 $\mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n})$ の元 (i.e. $\mathbf{N}_{1,n}$ から $\mathbf{N}_{1,n}$ 自身への全単射) のことである. いま,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{N}}_{1,n}^2 &= \{(k,l) \in \mathbf{N}_{1,n} \times \mathbf{N}_{1,n} \mid k \neq l\}, \\ \hat{\mathbf{N}}_{1,n}^2 &= \{(k,l) \in \mathbf{N}_{1,n} \times \mathbf{N}_{1,n} \mid k < l\} \\ &\quad (\subset \mathbf{N}_{1,n} \times \mathbf{N}_{1,n}) \quad \text{for } n \in \mathbf{N}_2\end{aligned}$$

とおき, 次を定義する.

定義 2.2. (i) $n \in \mathbf{N}$ のとき,

$$\iota(i) = i \,(\in \mathbf{N}_{1,n}) \quad \text{for } i \in \mathbf{N}_{1,n}$$

によって定まる $\iota : \mathbf{N}_{1,n} \to \mathbf{N}_{1,n}$ を ($\mathbf{N}_{1,n}$ 上の)

恒等置換という.

(ii) $n \in \mathbf{N}_2$ のとき, $(k,l) \in \tilde{\mathbf{N}}_{1,n}^2$ に対し,

$$\sigma[k,l](i) = \begin{cases} l\,(\in \mathbf{N}_{1,n}) & \text{for } i = k, \\ k\,(\in \mathbf{N}_{1,n}) & \text{for } i = l, \\ i\,(\in \mathbf{N}_{1,n}) & \text{for } i \in \mathbf{N}_{1,n} \backslash \{k,l\} \end{cases}$$

によって定まる $\sigma[k,l] : \mathbf{N}_{1,n} \to \mathbf{N}_{1,n}$ を ($\mathbf{N}_{1,n}$ 上の) 互換という. □

注意 2.3. $n = 1$ のとき,

$$\mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,1}) = \{\iota\}$$

である. □

注意 2.4. $n \in \mathbf{N}_2$ のとき, 次が成り立つ.

(i) $\iota \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n})$.

(ii) $\tau \circ \sigma \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n})$ for $\tau, \sigma \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n})$.

(iii) $\sigma \circ \iota = \iota \circ \sigma = \sigma\,(\in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n}))$ for $\sigma \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n})$.

(iv) $\sigma[k,l] \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n})$ for $(k,l) \in \tilde{\mathbf{N}}_{1,n}^2$.

(v) $\sigma[k,l] = \sigma[l,k]$, $\sigma[k,l] \circ \sigma[k,l] = \iota$ $(\in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n}))$ for $(k,l) \in \tilde{\mathbf{N}}_{1,n}^2$. □

次の事実は, 線形代数学においても用いられるので, 証明は省略する (例えば, [7] 参照).

命題 2.2. $n \in \mathbf{N}_2$ とすると, 任意の $\sigma \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n})$ に対し,

$$\sigma = \sigma[k_m,l_m] \circ \sigma[k_{m-1},l_{m-1}] \circ \sigma[k_{m-2},l_{m-2}] \circ \cdots \circ \sigma[k_2,l_2] \circ \sigma[k_1,l_1] \quad (\in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n}))$$

をみたす $m \in \mathbf{N}$ 及び $\{(k_j,l_j)\}_{j \in \mathbf{N}_{1,m}} \subset \hat{\mathbf{N}}_{1,n}^2$ が存在する. □

いま, 次が成り立つことを示す.

補題 2.2. $n \in \mathbf{N}_2$ とし, $(k,l) \in \hat{\mathbf{N}}_{1,n}^2$, $\{a_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathbf{R}$ とすると,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\sigma[k,l](i)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \,(\in \mathbf{R})$$

が成り立つ.

証明. $(k,l) \in \hat{\mathbf{N}}_{1,n}^2$ より, $1 \le k \le l-1 < l \le n$ であるから, 命題 2.1 (iii), 注意 2.2 によって

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} a_{\sigma[k,l](i)} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_{\sigma[k,l](i)} + \sum_{i=k}^{k} a_{\sigma[k,l](i)} + \sum_{i=k+1}^{l-1} a_{\sigma[k,l](i)} + \sum_{i=l}^{l} a_{\sigma[k,l](i)} + \sum_{i=l+1}^{n} a_{\sigma[k,l](i)} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_{\sigma[k,l](i)} + a_{\sigma[k,l](k)} + \sum_{i=k+1}^{l-1} a_{\sigma[k,l](i)} + a_{\sigma[k,l](l)} + \sum_{i=l+1}^{n} a_{\sigma[k,l](i)} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_l + \sum_{i=k+1}^{l-1} a_i + a_k + \sum_{i=l+1}^{n} a_i \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_k + \sum_{i=k+1}^{l-1} a_i + a_l + \sum_{i=l+1}^{n} a_i \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_i + \sum_{i=k}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{l-1} a_i + \sum_{i=l}^{l} a_i + \sum_{i=l+1}^{n} a_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i
\end{aligned}$$

が成り立つ. □

これより, 次が得られる.

命題 2.3. $n \in \mathbf{N}$ とし, $\sigma \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n})$, $\{a_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n}} \subset \mathbf{R}$ とすると,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \,(\in \mathbf{R})$$

が成り立つ.

証明. (i) $n = 1$ のとき, 注意 2.3 より $\mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,1}) = \{\iota\}$ であるから, $\sigma = \iota$, $\sigma(1) = \iota(1) = 1$ である. また, $\{a_i\}_{i \in \mathbf{N}_{1,1}} = \{a_1\}$ であるから,

$$\sum_{i=1}^{1} a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(1)} = a_1 = \sum_{i=1}^{1} a_i$$

が成り立つ.

(ii) $n \in \mathbf{N}_2$ のとき, $\sigma \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n})$ であるから, 命題 2.2 によって

$$\sigma = \sigma[k_m,l_m] \circ \sigma[k_{m-1},l_{m-1}] \circ \sigma[k_{m-2},l_{m-2}] \circ \cdots \circ \sigma[k_2,l_2] \circ \sigma[k_1,l_1]$$

をみたす $m \in \mathbf{N}$ 及び $\{(k_j,l_j)\}_{j \in \mathbf{N}_{1,m}} \subset \hat{\mathbf{N}}_{1,n}^2$ が存在する.

$(\mathrm{a})_1$ $m = 1$ のとき, $\sigma = \sigma[k_1,l_1]$ であるから, 補題 2.2 によって

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma[k_1,l_1](i)} = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

が成り立つ.

$(\mathrm{a})_m$ $m \in \mathbf{N}_2$ のとき, $j \in \mathbf{N}_{1,m}$ に対して

$$a_i^{(j)} = a_{\sigma[k_m,l_m] \circ \sigma[k_{m-1},l_{m-1}] \circ \cdots \circ \sigma[k_j,l_j](i)} \,(\in \mathbf{R}) \quad \text{for } i \in \mathbf{N}_{1,n}$$

とおくと, $j \in \mathbf{N}_{1,m-1}$ に対して

$$\begin{aligned}
&a_{\sigma[k_j,l_j](i)}^{(j+1)} \\
&= a_{\sigma[k_m,l_m] \circ \sigma[k_{m-1},l_{m-1}] \circ \cdots \circ \sigma[k_{j+1},l_{j+1}](\sigma[k_j,l_j](i))} \\
&= a_{\sigma[k_m,l_m] \circ \sigma[k_{m-1},l_{m-1}] \circ \cdots \circ \sigma[k_{j+1},l_{j+1}] \circ \sigma[k_j,l_j](i)} \\
&= a_i^{(j)} \quad \text{for } i \in \mathbf{N}_{1,n}
\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} a_i^{(1)} &= a_{\sigma[k_m,l_m]\circ\sigma[k_{m-1},l_{m-1}]\circ\cdots\circ\sigma[k_1,l_1](i)} \\ &= a_{\sigma(i)}, \\ a_i^{(m)} &= a_{\sigma[k_m,l_m](i)} \quad \text{for } i \in \mathbf{N}_{1,n} \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, 補題 2.2 を用いると,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma[k_j,l_j](i)}^{(j+1)} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(j+1)} \quad \text{for } j \in \mathbf{N}_{1,m-1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma[k_m,l_m](i)} = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

が得られ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} &= \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(2)} = \cdots = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(m)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \end{aligned}$$

が成り立つ. □

3. 有限集合と実数の有限和

まず, 有限集合について述べるが, ここでは次の定義に従って議論を行う ([6] 参照).

定義 3.1. (i) 集合 Λ が有限集合であるとは, 次の (a), (b) のいずれかをみたすことである.

(a) $\mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,m};\Lambda) \neq \phi$ をみたす $m \in \mathbf{N}$ が存在.

(b) $\Lambda = \phi$.

(ii) 集合 Λ に対し, Λ の有限部分集合全体の集合を

$$\mathcal{P}_0(\Lambda) = \{\, \tilde{\Lambda} \in \mathcal{P}(\Lambda) \mid \tilde{\Lambda} \text{ は有限集合} \,\} \, (\subset \mathcal{P}(\Lambda))$$

と表す. □

有限集合の元の個数を定義するために, 次の事実が重要である. ここではその証明は省略する.

命題 3.1. $m, n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,m};\mathbf{N}_{1,n}) \neq \phi$ ならば, $m = n$ が成り立つ. □

これにより, 定義 3.1 (i)(a) において, $\mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,m};\Lambda) \neq \phi$ をみたす $m \in \mathbf{N}$ は (Λ によって) 一意的に定まることが分かり, 次を定義することができる.

定義 3.2. Λ を有限集合とするとき, 次によって $n[\Lambda] \in \mathbf{N}_0$ を定義し, これを Λ の元の個数という.

(a) $m \in \mathbf{N}$, $\mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,m};\Lambda) \neq \phi$ のとき,

$$n[\Lambda] = m \, (\in \mathbf{N} \subset \mathbf{N}_0).$$

(b) $\Lambda = \phi$ のとき, $n[\Lambda] = n[\phi] = 0 \, (\in \mathbf{N}_0)$. □

注意 3.1. $\Lambda \neq \phi$ を有限集合とする. このとき, $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[\Lambda]};\Lambda)$ をとると,

$$\begin{aligned} \Lambda &= \alpha(\mathbf{N}_{1,n[\Lambda]}) = \{\alpha(i)\}_{i \in \mathbf{N}_{1,n[\Lambda]}} \\ &= \{\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \ldots, \\ &\qquad \alpha(n[\Lambda]-1), \alpha(n[\Lambda])\}, \end{aligned}$$

$$\alpha(i) \neq \alpha(j) \, (\in \Lambda) \quad \text{for } i, j \in \mathbf{N}_{1,n[\Lambda]},\ i \neq j$$

と表すことができる. □

例 3.1. $m, n \in \mathbf{Z}$, $m \leq n$ のとき,

$$\alpha(i) = i + m - 1 \, (\in \mathbf{N}_{m,n}) \quad \text{for } i \in \mathbf{N}_{1,n-m+1}$$

によって $\alpha : \mathbf{N}_{1,n-m+1} \to \mathbf{N}_{m,n}$ を定義すると, $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n-m+1};\mathbf{N}_{m,n}) \neq \phi$ となるから, $\mathbf{N}_{m,n} \in \mathcal{P}_0(\mathbf{Z})$ であり, $n[\mathbf{N}_{m,n}] = n - m + 1 \, (\in \mathbf{N})$ が成り立つ. 特に, $n \in \mathbf{N}$ に対し, $\mathbf{N}_{1,n} \in \mathcal{P}_0(\mathbf{N})$, $n[\mathbf{N}_{1,n}] = n \, (\in \mathbf{N})$ である. □

このとき, 次が成り立つが, 証明は省略する.

命題 3.2. Λ, M を集合とすると, 次が成り立つ.

(i) Λ が有限集合であるとき, $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{P}(\Lambda)$ (i.e. $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$) とすると, $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{P}_0(\Lambda)$ であり,

$$n[\tilde{\Lambda}] \leq n[\Lambda] \, (\in \mathbf{N}_0).$$

(ii) $\tilde{\Lambda}, \hat{\Lambda} \in \mathcal{P}_0(\Lambda)$, $\tilde{\Lambda} \cap \hat{\Lambda} = \phi$ とすると, $\tilde{\Lambda} \cup \hat{\Lambda} \in \mathcal{P}_0(\Lambda)$ であり,

$$n[\tilde{\Lambda} \cup \hat{\Lambda}] = n[\tilde{\Lambda}] + n[\hat{\Lambda}] \, (\in \mathbf{N}_0).$$

(iii) $m \in \mathbf{N}$ のとき, $\{\Lambda_k\}_{k \in \mathbf{N}_{1,m}} \subset \mathcal{P}_0(\Lambda)$ が

$$\Lambda_j \cap \Lambda_k = \phi \quad \text{for } j, k \in \mathbf{N}_{1,m},\ j \neq k$$

をみたすならば, $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbf{N}_{1,m}} \Lambda_k \in \mathcal{P}_0(\Lambda)$ であり,

$$n\Big[\bigcup_{k \in \mathbf{N}_{1,m}} \Lambda_k\Big] = \sum_{k \in \mathbf{N}_{1,m}} n[\Lambda_k] \, (\in \mathbf{N}_0).$$

(iv) Λ, M が共に有限集合ならば, その直積集合 $\Lambda \times M$ は有限集合であり,

$$n[\Lambda \times M] = n[\Lambda]\, n[M] \, (\in \mathbf{N}_0).$$ □

次に, 有限集合 Λ を添数集合とするような実数の集合 $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} = \{\, a_\lambda \in \mathbf{R} \mid \lambda \in \Lambda \,\} \subset \mathbf{R}$ に対し, その和 $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \, (\in \mathbf{R})$ を定義する. このために, 次を示す.

補題 3.1. $\Lambda \neq \phi$ を有限集合とし, $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathbf{R}$ とすると, $\alpha, \beta \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[\Lambda]};\Lambda)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n[\Lambda]} a_{\alpha(i)} = \sum_{i=1}^{n[\Lambda]} a_{\beta(i)} \, (\in \mathbf{R})$$

が成り立つ.

証明. $\alpha, \beta \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[\Lambda]};\Lambda)$ であるから, α の逆写像 $\alpha^{-1} \in \mathcal{B}(\Lambda;\mathbf{N}_{1,n[\Lambda]})$ をとると,

$$\alpha^{-1}\circ\beta \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[\Lambda]};\mathbf{N}_{1,n[\Lambda]}) = \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[\Lambda]})$$

である．このとき,

$$b_i = a_{\alpha(i)}\,(\in \mathbf{R}) \quad \text{for } i \in \mathbf{N}_{1,n[\Lambda]}$$

とおくと, 命題 2.3 によって

$$\sum_{i=1}^{n[\Lambda]} a_{\alpha(i)} = \sum_{i=1}^{n[\Lambda]} b_i = \sum_{i=1}^{n[\Lambda]} b_{\alpha^{-1}\circ\beta(i)} = \sum_{i=1}^{n[\Lambda]} a_{\alpha(\alpha^{-1}\circ\beta(i))} = \sum_{i=1}^{n[\Lambda]} a_{\beta(i)}$$

が得られる． □

これにより, 次を定義することができる．

定義 3.3. Λ を有限集合とし, $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathbf{R}$ とする．

(a) $\Lambda \neq \phi$ のとき, $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[\Lambda]};\Lambda)$ に対し,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sum_{i=1}^{n[\Lambda]} a_{\alpha(i)}\,(\in \mathbf{R})$$

と定義する．

(b) $\Lambda = \phi$ のとき, ($\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} = \{a_\lambda\}_{\lambda\in\phi} = \phi$ であり, 形式的に)

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sum_{\lambda\in\phi} a_\lambda = 0\,(\in \mathbf{R})$$

と定義する． □

注意 3.2. (i) Λ を有限集合とすると,

$$\{0\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathbf{R},\ \sum_{\lambda\in\Lambda} 0 = 0\,(\in \mathbf{R})$$

が成り立つ．

(ii) Λ を集合とし, $\lambda_0 \in \Lambda$, $a_{\lambda_0} \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\{\lambda_0\} \in \mathcal{P}_0(\Lambda)\backslash\{\phi\},\ \sum_{\lambda\in\{\lambda_0\}} a_\lambda = a_{\lambda_0}\,(\in \mathbf{R})$$

が成り立つ． □

例 3.1 により, $m,n \in \mathbf{Z}$, $m \leq n$ に対して $\mathbf{N}_{m,n} \in \mathcal{P}_0(\mathbf{Z})$ であるが, これに関して次が成り立つ．

命題 3.3. $m,n \in \mathbf{Z}$, $m \leq n$ とし, $\{a_i\}_{i\in\mathbf{N}_{m,n}} \subset \mathbf{R}$ とすると,

$$\sum_{i\in\mathbf{N}_{m,n}} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i\,(\in \mathbf{R})$$

が成り立つ．

証明. 例 3.1 の $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n-m+1};\mathbf{N}_{m,n})$ をとると, 補題 2.1 により,

$$\sum_{i\in\mathbf{N}_{m,n}} a_i = \sum_{i=1}^{n[\mathbf{N}_{m,n}]} a_{\alpha(i)} = \sum_{i=1}^{n-m+1} a_{i+m-1} = \sum_{i=m+(1-m)}^{n+(1-m)} a_{i-(1-m)} = \sum_{i=m}^{n} a_i$$

が得られる． □

命題 3.3, 補題 2.1 によって次が得られるが, 証明は省略する．

補題 3.2. $m,n,k \in \mathbf{Z}$, $m \leq n$ とし, $\{a_i\}_{i\in\mathbf{N}_{m,n}} \subset \mathbf{R}$ とすると,

$$i-k \in \mathbf{N}_{m,n} \quad \text{for } i \in \mathbf{N}_{m+k,n+k}$$

であり,

$$\sum_{i\in\mathbf{N}_{m+k,n+k}} a_{i-k} = \sum_{i\in\mathbf{N}_{m,n}} a_i\,(\in \mathbf{R})$$

が成り立つ． □

いま, 次を示す．

補題 3.3. $\Lambda, M \neq \phi$ を有限集合, $\gamma \in \mathcal{B}(M;\Lambda)$ とする．このとき, $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathbf{R}$ とすると,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sum_{\mu\in M} a_{\gamma(\mu)}\,(\in \mathbf{R})$$

が成り立つ．

証明. $\beta \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[M]};M)$ をとると,

$$\gamma\circ\beta \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[M]};\Lambda) \neq \phi$$

となるから, 定義 3.2 によって $n[\Lambda] = n[M]\,(\in \mathbf{N})$ であり, 定義 3.3 によって

$$\sum_{\mu\in M} a_{\gamma(\mu)} = \sum_{i=1}^{n[M]} a_{\gamma(\beta(i))} = \sum_{i=1}^{n[\Lambda]} a_{\gamma\circ\beta(i)} = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$$

が成り立つ． □

更に, 命題 3.2 (iii) によって次が成り立つ．

補題 3.4. Λ を集合, $M \neq \phi$ を有限集合とする．このとき, $\{\Lambda_\mu\}_{\mu\in M} \subset \mathcal{P}_0(\Lambda)$ が

$$\Lambda_\mu \cap \Lambda_\nu = \phi \quad \text{for } \mu,\nu \in M,\ \mu \neq \nu$$

をみたすならば, $\bigcup_{\mu\in M} \Lambda_\mu \in \mathcal{P}_0(\Lambda)$ であり,

$$n\Big[\bigcup_{\mu\in M} \Lambda_\mu\Big] = \sum_{\mu\in M} n[\Lambda_\mu]\,(\in \mathbf{N}_0)$$

が成り立つ．

証明. $\beta \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[M]};M)$ をとると,

$$\beta(j) \neq \beta(k) \in M,\ \Lambda_{\beta(j)} \cap \Lambda_{\beta(k)} = \phi \quad \text{for } j,k \in \mathbf{N}_{1,n[M]},\ j \neq k$$

であり, 注意 2.1, 命題 3.2 によって

$$\bigcup_{\mu\in M} \Lambda_\mu = \bigcup_{k\in\mathbf{N}_{1,n[M]}} \Lambda_{\beta(k)} \in \mathcal{P}_0(\Lambda)$$

及び

$$n\Big[\bigcup_{\mu\in M} \Lambda_\mu\Big] = n\Big[\bigcup_{k\in\mathbf{N}_{1,n[M]}} \Lambda_{\beta(k)}\Big] = \sum_{k=1}^{n[M]} n[\Lambda_{\beta(k)}] = \sum_{\mu\in M} n[\Lambda_\mu]$$

が成り立つ． □

4. 実数の有限和の性質

次に, 3 節で定義された実数の有限和に対し, 2 節で述べられた命題 2.1 に相当する性質を示す．ま

ず, 次の性質は命題 2.1 (i) に相当するものであるが, 証明は省略する.

命題 4.1. Λ を有限集合とし, $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathbf{R}$, $c\in\mathbf{R}$ とすると,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} ca_\lambda = c\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda,$$
$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda+b_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda + \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda\ (\in\mathbf{R})$$

が成り立つ. □

次に, 命題 2.1 (ii) に相当する性質として, 次を証明する.

命題 4.2. Λ を集合とし, $\tilde{\Lambda},\hat{\Lambda}\in\mathcal{P}_0(\Lambda)$ は $\tilde{\Lambda}\cap\hat{\Lambda}=\phi$ をみたすとする. このとき, $\tilde{\Lambda}\cup\hat{\Lambda}\in\mathcal{P}_0(\Lambda)$ であり, $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\tilde{\Lambda}\cup\hat{\Lambda}}\subset\mathbf{R}$ とすると,

$$\sum_{\lambda\in\tilde{\Lambda}\cup\hat{\Lambda}} a_\lambda = \sum_{\lambda\in\tilde{\Lambda}} a_\lambda + \sum_{\lambda\in\hat{\Lambda}} a_\lambda\ (\in\mathbf{R})$$

が成り立つ.

証明. $\tilde{\Lambda}\cup\hat{\Lambda}\in\mathcal{P}_0(\Lambda)$ であることは命題 3.2 (ii) による.

(a) $\tilde{\Lambda}=\phi$ のとき, $\tilde{\Lambda}\cup\hat{\Lambda}=\phi\cup\hat{\Lambda}=\hat{\Lambda}$ であり,

$$\sum_{\lambda\in\tilde{\Lambda}} a_\lambda = \sum_{\lambda\in\phi} a_\lambda = 0$$

であるから,

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\tilde{\Lambda}\cup\hat{\Lambda}} a_\lambda &= \sum_{\lambda\in\hat{\Lambda}} a_\lambda = 0+\sum_{\lambda\in\hat{\Lambda}} a_\lambda\\ &= \sum_{\lambda\in\tilde{\Lambda}} a_\lambda + \sum_{\lambda\in\hat{\Lambda}} a_\lambda\end{aligned}$$

が成り立つ.

$\hat{\Lambda}=\phi$ のときも, 同様にして主張が得られる.

(b) $\tilde{\Lambda}\neq\phi$, $\hat{\Lambda}\neq\phi$ のとき, 命題 3.2 (ii) によって $n[\tilde{\Lambda}\cup\hat{\Lambda}]=n[\tilde{\Lambda}]+n[\hat{\Lambda}]$ であり,

$$\mathbf{N}_{1,n[\tilde{\Lambda}\cup\hat{\Lambda}]} = \mathbf{N}_{1,n[\tilde{\Lambda}]}\cup\mathbf{N}_{n[\tilde{\Lambda}]+1,n[\tilde{\Lambda}]+n[\hat{\Lambda}]},$$
$$\mathbf{N}_{1,n[\tilde{\Lambda}]}\cap\mathbf{N}_{n[\tilde{\Lambda}]+1,n[\tilde{\Lambda}]+n[\hat{\Lambda}]}=\phi$$

かつ

$$i-n[\tilde{\Lambda}]\in\mathbf{N}_{1,n[\hat{\Lambda}]}\quad \text{for } i\in\mathbf{N}_{n[\tilde{\Lambda}]+1,n[\tilde{\Lambda}]+n[\hat{\Lambda}]}$$

が成り立つ. そこで,

$$\tilde{\alpha}\in\mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[\tilde{\Lambda}]};\tilde{\Lambda}),\ \hat{\alpha}\in\mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[\hat{\Lambda}]};\hat{\Lambda})$$

をとると,

$$\alpha(i)=\begin{cases}\tilde{\alpha}(i)\,(\in\tilde{\Lambda}) & \text{for } i\in\mathbf{N}_{1,n[\tilde{\Lambda}]},\\ \hat{\alpha}(i-n[\tilde{\Lambda}])\,(\in\hat{\Lambda}) & \\ & \text{for } i\in\mathbf{N}_{n[\tilde{\Lambda}]+1,n[\tilde{\Lambda}]+n[\hat{\Lambda}]}\end{cases}$$

によって $\alpha:\mathbf{N}_{1,n[\tilde{\Lambda}\cup\hat{\Lambda}]}\to\tilde{\Lambda}\cup\hat{\Lambda}$ を定義することができ, $\alpha\in\mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[\tilde{\Lambda}\cup\hat{\Lambda}]};\tilde{\Lambda}\cup\hat{\Lambda})$ が成り立つ. また, 補題 2.1 によって

$$\begin{aligned}\sum_{i=n[\tilde{\Lambda}]+1}^{n[\tilde{\Lambda}]+n[\hat{\Lambda}]} a_{\hat{\alpha}(i-n[\tilde{\Lambda}])} &= \sum_{i=1+n[\tilde{\Lambda}]}^{n[\hat{\Lambda}]+n[\tilde{\Lambda}]} a_{\hat{\alpha}(i-n[\tilde{\Lambda}])}\\ &= \sum_{i=1}^{n[\hat{\Lambda}]} a_{\hat{\alpha}(i)}\end{aligned}$$

であるから, 命題 2.1 (ii) によって

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\tilde{\Lambda}\cup\hat{\Lambda}} a_\lambda &= \sum_{i=1}^{n[\tilde{\Lambda}\cup\hat{\Lambda}]} a_{\alpha(i)}\\ &= \sum_{i=1}^{n[\tilde{\Lambda}]} a_{\alpha(i)} + \sum_{i=n[\tilde{\Lambda}]+1}^{n[\tilde{\Lambda}]+n[\hat{\Lambda}]} a_{\alpha(i)}\\ &= \sum_{i=1}^{n[\tilde{\Lambda}]} a_{\tilde{\alpha}(i)} + \sum_{i=n[\tilde{\Lambda}]+1}^{n[\tilde{\Lambda}]+n[\hat{\Lambda}]} a_{\hat{\alpha}(i-n[\tilde{\Lambda}])}\\ &= \sum_{i=1}^{n[\tilde{\Lambda}]} a_{\tilde{\alpha}(i)} + \sum_{i=1}^{n[\hat{\Lambda}]} a_{\hat{\alpha}(i)}\\ &= \sum_{\lambda\in\tilde{\Lambda}} a_\lambda + \sum_{\lambda\in\hat{\Lambda}} a_\lambda\end{aligned}$$

が得られる. □

命題 2.1 (iii) に相当する性質を示すため, 次の補題が本質的である.

補題 4.1. $\Lambda, M\neq\phi$ を有限集合とし, $\{\Lambda_\mu\}_{\mu\in M}\subset\mathcal{P}_0(\Lambda)$ は $\Lambda=\bigcup_{\mu\in M}\Lambda_\mu$ かつ

$$\Lambda_\mu\neq\phi,\ \Lambda_\mu\cap\Lambda_\nu=\phi\quad\text{for } \mu,\nu\in M,\ \mu\neq\nu$$

をみたすとする. このとき, $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\mathbf{R}$ とすると,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda = \sum_{\mu\in M}\Bigl(\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda\Bigr)\ (\in\mathbf{R})$$

が成り立つ.

証明. $\beta\in\mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[M]};M)$ をとると,

$$\begin{aligned}&\beta(j)\neq\beta(k)\in M,\ \Lambda_{\beta(j)}\cap\Lambda_{\beta(k)}=\phi\\ &\qquad\text{for } j,k\in\mathbf{N}_{1,n[M]},\ j\neq k\end{aligned}$$

であり, 注意 2.1 によって

$$\bigcup_{\mu\in M}\Lambda_\mu = \bigcup_{k\in\mathbf{N}_{1,n[M]}}\Lambda_{\beta(k)}$$

が成り立つ. ここで,

$$m_0=0,\ m_k=\sum_{j=1}^{k} n[\Lambda_{\beta(j)}]\quad\text{for } k\in\mathbf{N}_{1,n[M]}$$

とおくと,

$$m_k-m_{k-1}=n[\Lambda_{\beta(k)}]\quad\text{for } k\in\mathbf{N}_{1,n[M]}$$

であり, 補題 3.4 によって

$$\begin{aligned}n[\Lambda] &= n\Bigl[\bigcup_{\mu\in M}\Lambda_\mu\Bigr] = \sum_{\mu\in M} n[\Lambda_\mu] = \sum_{k=1}^{n[M]} n[\Lambda_{\beta(k)}]\\ &= m_{n[M]}\end{aligned}$$

が得られる. 更に,

$$\mathbf{N}_{1,n[\Lambda]} = \mathbf{N}_{1,m_{n[M]}} = \bigcup_{k\in\mathbf{N}_{1,n[M]}}\mathbf{N}_{m_{k-1}+1,m_k},$$

$$\mathbf{N}_{m_{j-1}+1,m_j} \cap \mathbf{N}_{m_{k-1}+1,m_k} = \phi \quad \text{for } j,k \in \mathbf{N}_{1,n[M]},\ j \neq k$$

かつ

$$i - m_{k-1} \in \mathbf{N}_{(m_{k-1}+1)-m_{k-1},m_k-m_{k-1}} = \mathbf{N}_{1,n[\Lambda_{\beta(k)}]} \quad \text{for } i \in \mathbf{N}_{m_{k-1}+1,m_k},\ k \in \mathbf{N}_{1,n[M]}$$

である. いま, 各 $\mu \in M$ に対し, $\mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[\Lambda_\mu]}\,;\Lambda_\mu) \neq \phi$ であるから, $\alpha_\mu \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[\Lambda_\mu]}\,;\Lambda_\mu)$ をとると,

$$\alpha(i) = \alpha_{\beta(k)}(i-m_{k-1})\,(\in \Lambda_{\beta(k)}) \quad \text{for } i \in \mathbf{N}_{m_{k-1}+1,m_k},\ k \in \mathbf{N}_{1,n[M]}$$

によって $\alpha : \mathbf{N}_{1,n[\Lambda]} \to \Lambda$ を定義することができ, $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[\Lambda]}\,;\Lambda)$ が成り立つ. このとき, 補題 2.1 によって

$$\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_{\alpha(i)} = \sum_{i=1+m_{k-1}}^{n[\Lambda_{\beta(k)}]+m_{k-1}} a_{\alpha_{\beta(k)}(i-m_{k-1})} = \sum_{i=1}^{n[\Lambda_{\beta(k)}]} a_{\alpha_{\beta(k)}(i)} = \sum_{\lambda \in \Lambda_{\beta(k)}} a_\lambda \quad \text{for } k \in \mathbf{N}_{1,n[M]}$$

が得られ, $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_{n[M]-1} < m_{n[M]} = n[\Lambda]$ であるから, 命題 2.1 (iii) によって

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sum_{i=1}^{n[\Lambda]} a_{\alpha(i)} = \sum_{k=1}^{n[M]} \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_{\alpha(i)} = \sum_{k=1}^{n[M]} \sum_{\lambda \in \Lambda_{\beta(k)}} a_\lambda = \sum_{\mu \in M} \sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda$$

が成り立つ. □

これより, 次が得られる.

定理 4.1. Λ, M を有限集合とし, $\{\Lambda_\mu\}_{\mu \in M} \subset \mathcal{P}_0(\Lambda)$ は $\Lambda = \bigcup_{\mu \in M} \Lambda_\mu$ かつ

$$\Lambda_\mu \cap \Lambda_\nu = \phi \quad \text{for } \mu,\nu \in M,\ \mu \neq \nu$$

をみたすとする. このとき, $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathbf{R}$ とすると,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sum_{\mu \in M} \sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda = \sum_{\mu \in M} \Bigl(\sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda \Bigr)\,(\in \mathbf{R})$$

が成り立つ.

証明. (i)

$$\tilde{M} = \{\mu \in M \mid \Lambda_\mu \neq \phi\},\quad \hat{M} = \{\mu \in M \mid \Lambda_\mu = \phi\}\,(\subset M)$$

とおくと, $M = \tilde{M} \cup \hat{M}$, $\tilde{M} \cap \hat{M} = \phi$ であり, 命題 3.2 (i) によって $\tilde{M}, \hat{M} \in \mathcal{P}_0(M)$ が成り立つ. また,

$$\Lambda_\mu = \phi \quad \text{for } \mu \in \hat{M}$$

であるから,

$$\Lambda = \bigcup_{\mu \in M} \Lambda_\mu = \bigcup_{\mu \in \tilde{M} \cup \hat{M}} \Lambda_\mu = \Bigl(\bigcup_{\mu \in \tilde{M}} \Lambda_\mu \Bigr) \cup \Bigl(\bigcup_{\mu \in \hat{M}} \Lambda_\mu \Bigr) = \Bigl(\bigcup_{\mu \in \tilde{M}} \Lambda_\mu \Bigr) \cup \Bigl(\bigcup_{\mu \in \hat{M}} \phi \Bigr) = \bigcup_{\mu \in \tilde{M}} \Lambda_\mu$$

が成り立つ.

(ii)
$$\sum_{\mu \in \hat{M}} \sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda = 0$$

が成り立つことを示す.

(a) $\hat{M} \neq \phi$ のとき,

$$\Lambda_\mu = \phi,\ \sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda = \sum_{\lambda \in \phi} a_\lambda = 0 \quad \text{for } \mu \in \hat{M}$$

であるから, $\hat{\beta} \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,n[\hat{M}]}\,;\hat{M})$ をとると,

$$\sum_{\mu \in \hat{M}} \sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda = \sum_{k=1}^{n[\hat{M}]} \Bigl(\sum_{\lambda \in \Lambda_{\hat{\beta}(k)}} a_\lambda \Bigr) = \sum_{k=1}^{n[\hat{M}]} 0 = 0$$

が成り立つ.

(b) $\hat{M} = \phi$ のとき,

$$\sum_{\mu \in \hat{M}} \sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda = \sum_{\mu \in \phi} \Bigl(\sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda \Bigr) = 0$$

である.

(iii)(a) $\tilde{M} \neq \phi$ のとき, $\{\Lambda_\mu\}_{\mu \in \tilde{M}} \subset \mathcal{P}_0(\Lambda)$ かつ

$$\Lambda_\mu \neq \phi,\ \Lambda_\mu \cap \Lambda_\nu = \phi \quad \text{for } \mu,\nu \in \tilde{M},\ \mu \neq \nu$$

であり, (i) によって $\Lambda = \bigcup_{\mu \in \tilde{M}} \Lambda_\mu$ であるから, 補題 4.1 によって

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sum_{\mu \in \tilde{M}} \sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda = \sum_{\mu \in \tilde{M}} \Bigl(\sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda \Bigr)$$

が成り立つ. また, (i) より, $M = \tilde{M} \cup \hat{M}$, $\tilde{M} \cap \hat{M} = \phi$ であり, $\Bigl\{ \sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda \Bigr\}_{\mu \in \tilde{M} \cup \hat{M}} \subset \mathbf{R}$ であるから, 命題 4.2 及び (ii) によって

$$\sum_{\mu \in M} \sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda = \sum_{\mu \in \tilde{M} \cup \hat{M}} \Bigl(\sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda \Bigr) = \sum_{\mu \in \tilde{M}} \Bigl(\sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda \Bigr) + \sum_{\mu \in \hat{M}} \Bigl(\sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda \Bigr) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$$

が成り立つ.

(b) $\tilde{M} = \phi$ のとき, (i) によって $M = \tilde{M} \cup \hat{M} = \phi \cup \hat{M} = \hat{M}$ であり,

$$\Lambda = \bigcup_{\mu \in \tilde{M}} \Lambda_\mu = \bigcup_{\mu \in \phi} \Lambda_\mu = \phi$$

であるから, (ii) によって

$$\sum_{\mu \in M} \sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda = \sum_{\mu \in \hat{M}} \sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda = 0 = \sum_{\lambda \in \phi} a_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$$

が成り立つ. □

注意 4.1. $m,n,l \in \mathbf{Z}$, $m \leq l < n$ とすると, 例 3.1 によって $\mathbf{N}_{m,n} \in \mathcal{P}_0(\mathbf{Z})$ であり,

$$\mathbf{N}_{m,n} = \mathbf{N}_{m,l} \cup \mathbf{N}_{l+1,n},\ \mathbf{N}_{m,l} \cap \mathbf{N}_{l+1,n} = \phi$$

が成り立つ．このとき, $\{a_i\}_{i\in\mathbf{N}_{m,n}}\subset\mathbf{R}$ とすると, 命題 4.2 によって

$$\sum_{i\in\mathbf{N}_{m,n}} a_i = \sum_{i\in\mathbf{N}_{m,l}\cup\mathbf{N}_{l+1,n}} a_i = \sum_{i\in\mathbf{N}_{m,l}} a_i + \sum_{i\in\mathbf{N}_{l+1,n}} a_i\,(\in\mathbf{R})$$

が得られる．特に, $\mathbf{N}_{m,m}=\{m\}$ であるから, 注意 3.2 (ii) によって

$$\sum_{i\in\mathbf{N}_{m,m}} a_i = \sum_{i\in\{m\}} a_i = a_m\,(\in\mathbf{R})$$

であり,

$$\sum_{i\in\mathbf{N}_{m,n}} a_i = \sum_{i\in\mathbf{N}_{m,m}} a_i + \sum_{i\in\mathbf{N}_{m+1,n}} a_i = a_m + \sum_{i\in\mathbf{N}_{m+1,n}} a_i\,(\in\mathbf{R})$$

が成り立つ．同様に,

$$\sum_{i\in\mathbf{N}_{m,n}} a_i = \sum_{i\in\mathbf{N}_{m,n-1}} a_i + a_n\,(\in\mathbf{R})$$

が成り立つ． □

これらを用いて得られる例を挙げておく．ここで, $\lfloor x\rfloor\,(\in\mathbf{Z})$ は $x\,(\in\mathbf{R})$ の整数部分を表す．また, 偶数全体, 奇数全体の集合をそれぞれ

$$2\mathbf{Z}=\{2m\in\mathbf{Z}\mid m\in\mathbf{Z}\},$$
$$2\mathbf{Z}+1=\{2m+1\in\mathbf{Z}\mid m\in\mathbf{Z}\}\,(\subset\mathbf{Z})$$

と表すことにする．次が成り立つことに注意しておく．

注意 4.2. (i) $\lfloor m+c\rfloor = m$ for $m\in\mathbf{Z}$, $c\in[0,1)$.
(ii) $m,j\in\mathbf{Z}$, $c\in[0,1)$ とすると,

$$m-c\le j \iff m\le j,$$
$$j\le m+c \iff j\le m$$

が成り立つ． □

例 4.1. $m,n\in\mathbf{Z}$, $m\le n$ とし, $\{a_l\}_{l\in\mathbf{N}_{m,n}}\subset\mathbf{R}$ とすると,

$$\sum_{l\in\mathbf{N}_{m,n}}\frac{1+(-1)^l}{2}a_l = \sum_{j\in\mathbf{N}_{\lfloor(m+1)/2\rfloor,\lfloor n/2\rfloor}} a_{2j}\,(\in\mathbf{R})$$

が成り立つ．

証明. (a) 例 3.1 より, $\mathbf{Z}\cap[m,n]=\mathbf{N}_{m,n}\in\mathcal{P}_0(\mathbf{Z})$ であり,

$$(2\mathbf{Z})\cap[m,n]\subset\mathbf{Z}\cap[m,n],$$
$$(2\mathbf{Z}+1)\cap[m,n]\subset\mathbf{Z}\cap[m,n]$$

であるから, 命題 3.2 (i) によって $(2\mathbf{Z})\cap[m,n]$, $(2\mathbf{Z}+1)\cap[m,n]\in\mathcal{P}_0(\mathbf{Z})$ が成り立つ．

(b) $j\in\mathbf{Z}$ とする．

$(\mathrm{b})_1$ $\qquad m\le 2j \iff \lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor\le j$

が成り立つ．実際, 注意 4.2 を用いると, $m\in 2\mathbf{Z}$ のとき, $\frac{m}{2}\in\mathbf{Z}$ より, $\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor=\lfloor\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\rfloor=\frac{m}{2}$ であるから,

$$m\le 2j \iff \frac{m}{2}\le j \iff \lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor\le j$$

が成り立つ．また, $m\in 2\mathbf{Z}+1$ のとき, $\frac{m+1}{2}\in\mathbf{Z}$ より, $\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor=\frac{m+1}{2}$ であるから,

$$\begin{aligned} m\le 2j &\iff \frac{m+1}{2}-\frac{1}{2}\le j\\ &\iff \lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor-\frac{1}{2}\le j\\ &\iff \lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor\le j\end{aligned}$$

が成り立つ．

$(\mathrm{b})_2$ $\qquad 2j\le n \iff j\le\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$

が成り立つ．実際, $n\in 2\mathbf{Z}$ のとき, $\frac{n}{2}\in\mathbf{Z}$ より, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor=\frac{n}{2}$ であるから,

$$2j\le n \iff j\le\frac{n}{2} \iff j\le\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$$

が成り立つ．また, $n\in 2\mathbf{Z}+1$ のとき, $\frac{n-1}{2}\in\mathbf{Z}$ より, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor=\lfloor\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}\rfloor=\frac{n-1}{2}$ であるから,

$$\begin{aligned} 2j\le n &\iff j\le\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}\\ &\iff j\le\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\frac{1}{2} \iff j\le\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\end{aligned}$$

が成り立つ．

(c) $j\in\mathbf{Z}$ とすると, (b) によって

$$\begin{aligned} &2j\in(2\mathbf{Z})\cap[m,n]\\ \iff& m\le 2j\le n\\ \iff& \lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor\le j\le\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\\ \iff& j\in\mathbf{Z}\cap\Big[\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\Big]\\ \iff& j\in\mathbf{N}_{\lfloor(m+1)/2\rfloor,\lfloor n/2\rfloor}\end{aligned}$$

が成り立つ．よって,

$$\tilde\gamma(j)=2j\,(\in(2\mathbf{Z})\cap[m,n]) \quad \text{for } j\in\mathbf{N}_{\lfloor(m+1)/2\rfloor,\lfloor n/2\rfloor}$$

によって $\tilde\gamma:\mathbf{N}_{\lfloor(m+1)/2\rfloor,\lfloor n/2\rfloor}\to(2\mathbf{Z})\cap[m,n]$ を定義することができ,

$$\tilde\gamma\in\mathcal{B}(\mathbf{N}_{\lfloor(m+1)/2\rfloor,\lfloor n/2\rfloor};(2\mathbf{Z})\cap[m,n])$$

が成り立つ．従って, 補題 3.3 により,

$$\sum_{l\in(2\mathbf{Z})\cap[m,n]} a_l = \sum_{j\in\mathbf{N}_{\lfloor(m+1)/2\rfloor,\lfloor n/2\rfloor}} a_{\tilde\gamma(j)} = \sum_{j\in\mathbf{N}_{\lfloor(m+1)/2\rfloor,\lfloor n/2\rfloor}} a_{2j}$$

が得られる．

(d) $\quad \mathbf{N}_{m,n}=\mathbf{Z}\cap[m,n]$

$$=((2\mathbf{Z})\cap[m,n])\cup((2\mathbf{Z}+1)\cap[m,n]),$$
$$((2\mathbf{Z})\cap[m,n])\cap((2\mathbf{Z}+1)\cap[m,n])=\phi$$

であり,

$$\frac{1+(-1)^l}{2}=\begin{cases}1 & \text{for } l\in(2\mathbf{Z})\cap[m,n],\\ 0 & \text{for } l\in(2\mathbf{Z}+1)\cap[m,n]\end{cases}$$

であるから, 命題 4.2, 注意 3.2 (i) 及び (c) を用いると,

$$\begin{aligned}&\sum_{l\in\mathbf{N}_{m,n}}\frac{1+(-1)^l}{2}a_l\\ &=\sum_{l\in(2\mathbf{Z})\cap[m,n]}\frac{1+(-1)^l}{2}a_l\\ &\qquad+\sum_{l\in(2\mathbf{Z}+1)\cap[m,n]}\frac{1+(-1)^l}{2}a_l\\ &=\sum_{l\in(2\mathbf{Z})\cap[m,n]}a_l+\sum_{l\in(2\mathbf{Z}+1)\cap[m,n]}0\\ &=\sum_{j\in\mathbf{N}_{\lfloor(m+1)/2\rfloor,\lfloor n/2\rfloor}}a_{2j}\end{aligned}$$

が得られる. □

5. 添数に関する和の順序交換

次に, Λ, M を有限集合とするとき, 命題 3.2 (iv), (i) によって, 直積集合 $\Lambda\times M$ の部分集合 K は有限集合, i.e. $K\in\mathcal{P}_0(\Lambda\times M)$ となる. このとき, この K を添数集合とするような実数の集合 $\{a_\kappa\}_{\kappa\in K}=\{a_{\lambda,\mu}\}_{(\lambda,\mu)\in K}\subset\mathbf{R}$ に対し, その和

$$\sum_{\kappa\in K}a_\kappa=\sum_{(\lambda,\mu)\in K}a_{\lambda,\mu}\,(\in\mathbf{R})$$

の計算方法について考える. 標準的には, λ についての和を計算してから μ について和を計算する方法と, μ についての和を計算してから λ について和を計算する方法とが考えられるが, 次の定理 5.1 により, (適切な規則に基いて) 2 つの添数 λ,μ に関する和の順序交換が可能となることが分かる.

定理 5.1. Λ, M を有限集合とし, $K\in\mathcal{P}(\Lambda\times M)$ は $\{\Lambda_\mu\}_{\mu\in M}\subset\mathcal{P}(\Lambda)$, $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\mathcal{P}(M)$ を用いて

$$K=\bigcup_{\mu\in M}(\Lambda_\mu\times\{\mu\})=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\{\lambda\}\times M_\lambda)\quad(\in\mathcal{P}(\Lambda\times M))$$

と表されるとし, $\{a_\kappa\}_{\kappa\in K}=\{a_{\lambda,\mu}\}_{(\lambda,\mu)\in K}\subset\mathbf{R}$ とする. このとき,

$$\{\Lambda_\mu\}_{\mu\in M}\subset\mathcal{P}_0(\Lambda),\ \{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\mathcal{P}_0(M),\quad K\in\mathcal{P}_0(\Lambda\times M)$$

であり,

$$\begin{aligned}\sum_{\kappa\in K}a_\kappa&=\sum_{(\lambda,\mu)\in K}a_{\lambda,\mu}\\ &=\sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu}a_{\lambda,\mu}=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\mu\in M_\lambda}a_{\lambda,\mu}\,(\in\mathbf{R})\end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. (i) $\mu\in M$, $\lambda\in\Lambda$ とすると, Λ, M は有限集合かつ $\Lambda_\mu\in\mathcal{P}(\Lambda)$, $M_\lambda\in\mathcal{P}(M)$ であるから, 命題 3.2 (i) によって $\Lambda_\mu\in\mathcal{P}_0(\Lambda)$, $M_\lambda\in\mathcal{P}_0(M)$ が成り立つ. また, 命題 3.2 (iv) によって $\Lambda\times M$ は有限集合であり, $K\in\mathcal{P}(\Lambda\times M)$ であるから, 命題 3.2 (i) によって $K\in\mathcal{P}_0(\Lambda\times M)$ が成り立つ.

(ii)(a) $\mu\in M$ に対し, $\alpha_\mu:\Lambda_\mu\to\Lambda_\mu\times\{\mu\}$ を

$$\alpha_\mu(\lambda)=(\lambda,\mu)\,(\in\Lambda_\mu\times\{\mu\})\quad\text{for }\lambda\in\Lambda_\mu$$

によって定めると, $\alpha_\mu\in\mathcal{B}(\Lambda_\mu;\Lambda_\mu\times\{\mu\})$ であるから, 補題 3.3 によって

$$\sum_{\kappa\in\Lambda_\mu\times\{\mu\}}a_\kappa=\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu}a_{\alpha_\mu(\lambda)}=\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu}a_{\lambda,\mu}\quad\text{for }\mu\in M$$

が成り立つ. また, $K=\bigcup_{\mu\in M}(\Lambda_\mu\times\{\mu\})$ かつ

$$(\Lambda_\mu\times\{\mu\})\cap(\Lambda_{\tilde\mu}\times\{\tilde\mu\})=\phi\quad\text{for }\mu,\tilde\mu\in M,\ \mu\neq\tilde\mu$$

であるから, 定理 4.1 によって

$$\sum_{\kappa\in K}a_\kappa=\sum_{\mu\in M}\sum_{\kappa\in\Lambda_\mu\times\{\mu\}}a_\kappa=\sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu}a_{\lambda,\mu}$$

が得られる.

(b) $\lambda\in\Lambda$ に対し, $\beta_\lambda:M_\lambda\to\{\lambda\}\times M_\lambda$ を

$$\beta_\lambda(\mu)=(\lambda,\mu)\,(\in\{\lambda\}\times M_\lambda)\quad\text{for }\mu\in M_\lambda$$

によって定めると, $\beta_\lambda\in\mathcal{B}(M_\lambda;\{\lambda\}\times M_\lambda)$ であり, (a) と同様にして,

$$\sum_{\kappa\in\{\lambda\}\times M_\lambda}a_\kappa=\sum_{\mu\in M_\lambda}a_{\beta_\lambda(\mu)}=\sum_{\mu\in M_\lambda}a_{\lambda,\mu}\quad\text{for }\lambda\in\Lambda$$

及び

$$\sum_{\kappa\in K}a_\kappa=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\kappa\in\{\lambda\}\times M_\lambda}a_\kappa=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\mu\in M_\lambda}a_{\lambda,\mu}$$

が成り立つ. □

注意 5.1. Λ, M を集合とし, $\{\Lambda_\mu\}_{\mu\in M}\subset\mathcal{P}(\Lambda)$, $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\mathcal{P}(M)$, $K\in\mathcal{P}(\Lambda\times M)$ とする. このとき,

$$K=\bigcup_{\mu\in M}(\Lambda_\mu\times\{\mu\})=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\{\lambda\}\times M_\lambda)\quad(\in\mathcal{P}(\Lambda\times M))$$

であることは, $(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M$ に対して

$$\begin{aligned}(\lambda,\mu)\in K&\iff\mu\in M,\ \lambda\in\Lambda_\mu\\ &\iff\lambda\in\Lambda,\ \mu\in M_\lambda\end{aligned}$$

が成り立つことを意味する. □

いま, いくつかの例を挙げておく.

例 5.1. $m,n\in\mathbf{N}$ のとき, $(j,l)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ に対して

$$\begin{aligned}(j,l)\in\mathbf{N}_{1,n}\times\mathbf{N}_{0,m}&\iff l\in\mathbf{N}_{0,m},\ j\in\mathbf{N}_{1,n}\\ &\iff j\in\mathbf{N}_{1,n},\ l\in\mathbf{N}_{0,m}\end{aligned}$$

であるから, 注意 5.1 によって

$$\mathbf{N}_{1,n}\times\mathbf{N}_{0,m}=\bigcup_{l\in\mathbf{N}_{0,m}}(\mathbf{N}_{1,n}\times\{l\})$$
$$=\bigcup_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}(\{j\}\times\mathbf{N}_{0,m})\,(\subset\mathbf{Z}\times\mathbf{Z})$$

が成り立つ. 従って, $\{a_{j,l}\}_{(j,l)\in\mathbf{N}_{1,n}\times\mathbf{N}_{0,m}}\subset\mathbf{R}$ とすると, 定理 5.1 によって

$$\sum_{(j,l)\in\mathbf{N}_{1,n}\times\mathbf{N}_{0,m}}a_{j,l}=\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m}}\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}a_{j,l}$$
$$=\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m}}a_{j,l}\,(\in\mathbf{R})$$

が得られる. □

例 5.2. $m\in\mathbf{N}$ とする.

(i) $(k,l)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ に対して

$$\begin{aligned}&l\in\mathbf{N}_{0,m-1},\,k\in\mathbf{N}_{1,l+1}\\ \Longleftrightarrow\;&0\le l\le m-1,\,1\le k\le l+1\\ \Longleftrightarrow\;&1\le k\le m,\,k-1\le l\le m-1\\ \Longleftrightarrow\;&k\in\mathbf{N}_{1,m},\,l\in\mathbf{N}_{k-1,m-1}\end{aligned}$$

であるから, 注意 5.1 によって

$$\bigcup_{l\in\mathbf{N}_{0,m-1}}(\mathbf{N}_{1,l+1}\times\{l\})=\bigcup_{k\in\mathbf{N}_{1,m}}(\{k\}\times\mathbf{N}_{k-1,m-1})$$
$$(\subset\mathbf{N}_{1,m}\times\mathbf{N}_{0,m-1}\subset\mathbf{Z}\times\mathbf{Z})$$

が成り立つ. そこで, この集合を K_m とおくとき, $\{a_{k,l}\}_{(k,l)\in K_m}\subset\mathbf{R}$ とすると, 定理 5.1 によって

$$\sum_{(k,l)\in K_m}a_{k,l}=\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m-1}}\sum_{k\in\mathbf{N}_{1,l+1}}a_{k,l}$$
$$=\sum_{k\in\mathbf{N}_{1,m}}\sum_{l\in\mathbf{N}_{k-1,m-1}}a_{k,l}\,(\in\mathbf{R})$$

が得られる.

(ii) (i) と同様に, $(k,l)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ に対して

$$\begin{aligned}&l\in\mathbf{N}_{1,m+1},\,k\in\mathbf{N}_{0,l-1}\\ \Longleftrightarrow\;&k\in\mathbf{N}_{0,m},\,l\in\mathbf{N}_{k+1,m+1}\end{aligned}$$

であるから, 注意 5.1 によって

$$\bigcup_{l\in\mathbf{N}_{1,m+1}}(\mathbf{N}_{0,l-1}\times\{l\})=\bigcup_{k\in\mathbf{N}_{0,m}}(\{k\}\times\mathbf{N}_{k+1,m+1})$$
$$(\subset\mathbf{N}_{0,m}\times\mathbf{N}_{1,m+1}\subset\mathbf{Z}\times\mathbf{Z})$$

が成り立つ. そこで, この集合を $\tilde{K}_m$ とおくとき, $\{a_{k,l}\}_{(k,l)\in\tilde{K}_m}\subset\mathbf{R}$ とすると, 定理 5.1 によって

$$\sum_{(k,l)\in\tilde{K}_m}a_{k,l}=\sum_{l\in\mathbf{N}_{1,m+1}}\sum_{k\in\mathbf{N}_{0,l-1}}a_{k,l}$$
$$=\sum_{k\in\mathbf{N}_{0,m}}\sum_{l\in\mathbf{N}_{k+1,m+1}}a_{k,l}\,(\in\mathbf{R})$$

が得られる. □

6. 累乗和の計算方法

以下において, $m\in\mathbf{N}_0$ とし, (自然数の) m 乗和

$$S_n^{(m)}=\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}j^m=\sum_{j=1}^{n}j^m\quad\text{for }n\in\mathbf{N}$$

(の公式) の計算方法について考察する. このために, 二項定理, i.e. $m\in\mathbf{N}$ のとき,

$$(x+y)^m=\sum_{k\in\mathbf{N}_{0,m}}\binom{m}{k}x^{m-k}y^k\,(\in\mathbf{R})$$
$$\text{for }x,y\in\mathbf{R}$$

(但し, $x^0=1$ for $x\in\mathbf{R}$) が成り立つことを用いる. ここで, 二項係数

$$\binom{m}{k}=\frac{m!}{k!\,(m-k)!}\quad\text{for }k,m\in\mathbf{N}_0,\,k\le m$$

(但し, $0!=1$) について

$$\binom{m}{m}=1,\ \binom{m+1}{m}=m+1,$$
$$\binom{m+2}{m}=\frac{(m+1)(m+2)}{2}\quad\text{for }m\in\mathbf{N}_0$$

が成り立つことに注意する. まず, 次を示す.

補題 6.1. $m\in\mathbf{N}$ とすると,

$$j^m-(j-1)^m=-\sum_{k\in\mathbf{N}_{0,m-1}}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}j^k,$$
$$(j+1)^m-j^m=\sum_{k\in\mathbf{N}_{0,m-1}}\binom{m}{k}j^k\quad\text{for }j\in\mathbf{N}$$

が成り立つ.

証明. 二項定理及び注意 4.1 によって

$$\begin{aligned}&(j\pm1)^m=((\pm1)+j)^m\\ &=\sum_{k\in\mathbf{N}_{0,m}}\binom{m}{k}(\pm1)^{m-k}j^k\\ &=\sum_{k\in\mathbf{N}_{0,m-1}}\binom{m}{k}(\pm1)^{m-k}j^k\\ &\qquad+\binom{m}{m}(\pm1)^{m-m}j^m\\ &=\sum_{k\in\mathbf{N}_{0,m-1}}\binom{m}{k}(\pm1)^{m-k}j^k+j^m\quad\text{for }j\in\mathbf{N}\end{aligned}$$

(複号同順) が得られ, 主張が従う. □

これを用いると, 命題 1.1 が得られる.

命題 1.1 の証明. (a) 補題 3.2 によって

$$\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}(j-1)^{m+1}=\sum_{j\in\mathbf{N}_{0+1,(n-1)+1}}(j-1)^{m+1}$$
$$=\sum_{j\in\mathbf{N}_{0,n-1}}j^{m+1}\quad\text{for }n\in\mathbf{N}$$

であるから, 命題 4.1, 注意 4.1 によって

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}(j^{m+1}-(j-1)^{m+1})\\ &=\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}j^{m+1}-\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}(j-1)^{m+1}\\ &=\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}j^{m+1}-\sum_{j\in\mathbf{N}_{0,n-1}}j^{m+1}\\ &=\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n-1}}j^{m+1}+n^{m+1}-0^{m+1}-\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n-1}}j^{m+1}\\ &=n^{m+1}\quad\text{for }n\in\mathbf{N}\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, 補題 6.1 により,

$$\begin{aligned}
&j^{m+1}-(j-1)^{m+1}\\
&=-\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,(m+1)-1}}(-1)^{(m+1)-l}\binom{m+1}{l}j^l\\
&=\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m}}(-1)^{m-l}\binom{m+1}{l}j^l\quad\text{for } j\in\mathbf{N}
\end{aligned}$$

であるから, 例 5.1 及び命題 4.1, 注意 4.1 によって

$$\begin{aligned}
n^{m+1}&=\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}(j^{m+1}-(j-1)^{m+1})\\
&=\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m}}(-1)^{m-l}\binom{m+1}{l}j^l\\
&=\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m}}\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}(-1)^{m-l}\binom{m+1}{l}j^l\\
&=\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m}}(-1)^{m-l}\binom{m+1}{l}\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}j^l\\
&=\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m}}(-1)^{m-l}\binom{m+1}{l}S_n^{(l)}\\
&=\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m-1}}(-1)^{m-l}\binom{m+1}{l}S_n^{(l)}\\
&\qquad+(-1)^{m-m}\binom{m+1}{m}S_n^{(m)}\\
&=\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m-1}}(-1)^{m-l}\binom{m+1}{l}S_n^{(l)}\\
&\qquad+(m+1)S_n^{(m)}\quad\text{for } n\in\mathbf{N}
\end{aligned}$$

が得られ, 主張の最初の等号が成り立つ.

(b) (a) と同様にして,

$$\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}((j+1)^{m+1}-j^{m+1})=(n+1)^{m+1}-1\quad\text{for } n\in\mathbf{N}$$

及び

$$(j+1)^{m+1}-j^{m+1}=\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m}}\binom{m+1}{l}j^l\quad\text{for } j\in\mathbf{N}$$

が得られ, これを用いると,

$$\begin{aligned}
(n+1)^{m+1}-1&=\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m}}\binom{m+1}{l}j^l\\
&=\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m}}\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}}\binom{m+1}{l}j^l\\
&=\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m-1}}\binom{m+1}{l}S_n^{(l)}+(m+1)S_n^{(m)}\\
&\qquad\text{for } n\in\mathbf{N}
\end{aligned}$$

が得られ, 主張の 2 番目の等号が成り立つ. □

更に, 例 4.1 と合わせると, 定理 1.1 が得られる.

定理 1.1 の証明. (a) $\gamma_m:\mathbf{N}_{1,m}\to\mathbf{N}_{0,m-1}$ を

$$\gamma_m(k)=m-k\,(\in\mathbf{N}_{0,m-1})\quad\text{for } k\in\mathbf{N}_{1,m}$$

によって定義すると, $\gamma_m\in\mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,m};\mathbf{N}_{0,m-1})$ であるから, 補題 3.3 及び例 4.1 によって

$$\begin{aligned}
&\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m-1}}\frac{1+(-1)^{l-m}}{2}\binom{m+1}{l}S_n^{(l)}\\
&=\sum_{k\in\mathbf{N}_{1,m}}\frac{1+(-1)^{\gamma_m(k)-m}}{2}\binom{m+1}{\gamma_m(k)}S_n^{(\gamma_m(k))}\\
&=\sum_{k\in\mathbf{N}_{1,m}}\frac{1+(-1)^{(m-k)-m}}{2}\binom{m+1}{m-k}S_n^{(m-k)}\\
&=\sum_{k\in\mathbf{N}_{1,m}}\frac{1+(-1)^{k}}{2}\binom{m+1}{m-k}S_n^{(m-k)}\\
&=\sum_{j\in\mathbf{N}_{\lfloor(1+1)/2\rfloor,\lfloor m/2\rfloor}}\binom{m+1}{m-2j}S_n^{(m-2j)}\\
&=\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,\lfloor m/2\rfloor}}\binom{m+1}{m-2j}S_n^{(m-2j)}\quad\text{for } n\in\mathbf{N}
\end{aligned}$$

が成り立つ.

(b) 命題 1.1 及び (a) によって

$$\begin{aligned}
&(m+1)S_n^{(m)}\\
&=\frac{1}{2}((m+1)S_n^{(m)}+(m+1)S_n^{(m)})\\
&=\frac{1}{2}\Big\{n^{m+1}-\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m-1}}(-1)^{m-l}\binom{m+1}{l}S_n^{(l)}\\
&\qquad+(n+1)^{m+1}-1\\
&\qquad-\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m-1}}\binom{m+1}{l}S_n^{(l)}\Big\}\\
&=\frac{1}{2}((n+1)^{m+1}+n^{m+1}-1)\\
&\qquad-\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m-1}}\frac{1+(-1)^{l-m}}{2}\binom{m+1}{l}S_n^{(l)}\\
&=\frac{1}{2}((n+1)^{m+1}+n^{m+1}-1)\\
&\qquad-\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,\lfloor m/2\rfloor}}\binom{m+1}{m-2j}S_n^{(m-2j)}\\
&\qquad\text{for } n\in\mathbf{N}
\end{aligned}$$

が得られ, 主張が成り立つ. □

7. 累乗和の公式の導出

次に, 累乗和の公式をもう少し具体的に計算する方法について述べる. ここでは, 次の命題 7.1 を用いることになるが, その詳しい証明については述べないことにする. 実際には, k が大きい方から順に帰納的に示すことになるが, $c_j=0$ for $j\in\mathbf{N}_{k+1,m}$ であるとき, 命題の仮定の式を n^k で割って $n\to\infty$ のときの極限を考えると, $c_k=0$ が得られることになる.

命題 7.1. $m,n_0\in\mathbf{N}$ とし, $\{c_k\}_{k\in\mathbf{N}_{0,m}}\subset\mathbf{R}$ は

$$\sum_{k\in\mathbf{N}_{0,m}}c_kn^k=0\,(\in\mathbf{R})\quad\text{for all } n\in\mathbf{N}_{n_0}$$

をみたすとする. このとき,

$$c_k=0\,(\in\mathbf{R})\quad\text{for all } k\in\mathbf{N}_{0,m}$$

が成り立つ. □

いま, 命題 1.2 を証明する.

命題 1.2 の証明. (a) 係数 $\{c_k^{(m)}\}_{k\in\mathbf{N}_{1,m+1}}\subset\mathbf{R}$ の一意性を示す.

$\{c_k^{(m)}\}_{k\in\mathbf{N}_{1,m+1}}, \{\tilde{c}_k^{(m)}\}_{k\in\mathbf{N}_{1,m+1}} \subset \mathbf{R}$ が

$$S_n^{(m)} = \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,m+1}} c_k^{(m)} n^k = \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,m+1}} \tilde{c}_k^{(m)} n^k \quad \text{for all } n \in \mathbf{N}$$

をみたすと仮定すると, $\{c_k^{(m)} - \tilde{c}_k^{(m)}\}_{k\in\mathbf{N}_{1,m+1}} \subset \mathbf{R}$ であり, 命題 4.1 によって

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,m+1}} c_k^{(m)} n^k - \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,m+1}} \tilde{c}_k^{(m)} n^k \\ &= \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,m+1}} (c_k^{(m)} - \tilde{c}_k^{(m)}) n^k \quad \text{for all } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

が得られる. 従って, 命題 7.1 により,

$$c_k^{(m)} - \tilde{c}_k^{(m)} = 0,\ c_k^{(m)} = \tilde{c}_k^{(m)} \quad \text{for all } k \in \mathbf{N}_{0,m}$$

が成り立つ.

(b)　$m \in \mathbf{N}_0$ に関する帰納法により, $l \in \mathbf{N}_{0,m}$ に対して

$$S_n^{(l)} = \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,l+1}} c_k^{(l)} n^k \quad \text{for all } n \in \mathbf{N}$$

をみたす $\{c_k^{(l)}\}_{k\in\mathbf{N}_{1,l+1}} \subset \mathbf{R}$ が存在することを示す.

$(\mathrm{b})_0$　$m = 0$ のとき, $c_1^{(0)} = 1\,(\in \mathbf{R})$ ととれば,

$$\{c_k^{(0)}\}_{k\in\mathbf{N}_{1,0+1}} = \{c_k^{(0)}\}_{k\in\mathbf{N}_{1,1}} = \{c_1^{(0)}\} = \{1\} \subset \mathbf{R}$$

であり, 注意 4.1, 注意 3.2 (ii) 及び例 1.1 によって

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,0+1}} c_k^{(0)} n^k &= \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,1}} c_k^{(0)} n^k = \sum_{k\in\{1\}} c_k^{(0)} n^k \\ &= c_1^{(0)} n^1 = n = S_n^{(0)} \quad \text{for all } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

が得られ, 主張が従う.

$(\mathrm{b})_m$　$m \in \mathbf{N}$ とし, $l \in \mathbf{N}_{0,m-1}$ に対して

$$S_n^{(l)} = \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,l+1}} c_k^{(l)} n^k \quad \text{for all } n \in \mathbf{N}$$

をみたす $\{c_k^{(l)}\}_{k\in\mathbf{N}_{1,l+1}} \subset \mathbf{R}$ が存在すると仮定する. このとき,

$$\begin{aligned} c_k^{(m)} &= -\frac{1}{m+1} \cdot \sum_{l\in\mathbf{N}_{k-1,m-1}} (-1)^{m-l} \binom{m+1}{l} c_k^{(l)} \quad \text{for } k \in \mathbf{N}_{1,m}, \\ c_{m+1}^{(m)} &= \frac{1}{m+1} \quad \text{for } k = m+1 \end{aligned}$$

とおくと, $\{c_k^{(m)}\}_{k\in\mathbf{N}_{1,m+1}} \subset \mathbf{R}$ であり, 命題 1.1, 命題 4.2, 例 5.2, 注意 4.1 によって

$$\begin{aligned} &(m+1)S_n^{(m)} \\ &= n^{m+1} - \sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m-1}} (-1)^{m-l} \binom{m+1}{l} S_n^{(l)} \\ &= -\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m-1}} (-1)^{m-l} \binom{m+1}{l} \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,l+1}} c_k^{(l)} n^k + n^{m+1} \\ &= -\sum_{l\in\mathbf{N}_{0,m-1}} \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,l+1}} (-1)^{m-l} \binom{m+1}{l} c_k^{(l)} n^k + n^{m+1} \\ &= -\sum_{k\in\mathbf{N}_{1,m}} \sum_{l\in\mathbf{N}_{k-1,m-1}} (-1)^{m-l} \binom{m+1}{l} c_k^{(l)} n^k + n^{m+1} \\ &= \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,m}} \Bigl(-\sum_{l\in\mathbf{N}_{k-1,m-1}} (-1)^{m-l} \binom{m+1}{l} c_k^{(l)}\Bigr) n^k + n^{m+1} \\ &= \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,m}} (m+1) c_k^{(m)} n^k + (m+1) c_{m+1}^{(m)} n^{m+1} \\ &= (m+1) \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,m+1}} c_k^{(m)} n^k \quad \text{for all } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

が得られ, 主張が従う. □

次に, 命題 1.3 を証明する.

命題 1.3 の証明. (a)　$l \in \mathbf{N}$ に対し, 補題 6.1 によって

$$n^l - (n-1)^l = -\sum_{k\in\mathbf{N}_{0,l-1}} (-1)^{l-k} \binom{l}{k} n^k \quad \text{for } n \in \mathbf{N}$$

であり, 注意 4.1 によって

$$\begin{aligned} S_n^{(m)} &= \sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n}} j^m = \sum_{j\in\mathbf{N}_{1,n-1}} j^m + n^m \\ &= S_{n-1}^{(m)} + n^m \quad \text{for } n \in \mathbf{N}_2 \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned} &\sum_{l\in\mathbf{N}_{m+1,m+1}} (-1)^{l-m} \binom{l}{m} c_l^{(m)} n^m \\ &= (-1)^{(m+1)-m} \binom{m+1}{m} c_{m+1}^{(m)} n^m \\ &= -(m+1) c_{m+1}^{(m)} n^m \quad \text{for } n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} a_k^{(m)} &= \sum_{l\in\mathbf{N}_{k+1,m+1}} (-1)^{l-k} \binom{l}{k} c_l^{(m)} \quad \text{for } k \in \mathbf{N}_{1,m-1}, \\ a_m^{(m)} &= 1 - (m+1) c_{m+1}^{(m)} \end{aligned}$$

とおくと, $\{a_k^{(m)}\}_{k\in\mathbf{N}_{0,m}} \subset \mathbf{R}$ であり, 命題 1.2, 例 5.2 (i) 及び命題 4.1, 注意 4.1 を用いることにより,

$$\begin{aligned} 0 &= n^m - S_n^{(m)} + S_{n-1}^{(m)} \\ &= n^m - \sum_{l\in\mathbf{N}_{1,m+1}} c_l^{(m)} n^l + \sum_{l\in\mathbf{N}_{1,m+1}} c_l^{(m)} (n-1)^l \\ &= n^m - \sum_{l\in\mathbf{N}_{1,m+1}} c_l^{(m)} (n^l - (n-1)^l) \\ &= n^m - \sum_{l\in\mathbf{N}_{1,m+1}} c_l^{(m)} \Bigl(-\sum_{k\in\mathbf{N}_{0,l-1}} (-1)^{l-k} \binom{l}{k} n^k\Bigr) \\ &= \sum_{l\in\mathbf{N}_{1,m+1}} \sum_{k\in\mathbf{N}_{0,l-1}} (-1)^{l-k} \binom{l}{k} c_l^{(m)} n^k + n^m \end{aligned}$$

$$= \sum_{k \in \mathbf{N}_{0,m}} \sum_{l \in \mathbf{N}_{k+1,m+1}} (-1)^{l-k} \binom{l}{k} c_l^{(m)} n^k + n^m$$
$$= \sum_{k \in \mathbf{N}_{0,m-1}} \sum_{l \in \mathbf{N}_{k+1,m+1}} (-1)^{l-k} \binom{l}{k} c_l^{(m)} n^k + \sum_{l \in \mathbf{N}_{m+1,m+1}} (-1)^{l-m} \binom{l}{m} c_l^{(m)} n^m + n^m$$
$$= \sum_{k \in \mathbf{N}_{0,m-1}} \sum_{l \in \mathbf{N}_{k+1,m+1}} (-1)^{l-k} \binom{l}{k} c_l^{(m)} n^k - (m+1) c_{m+1}^{(m)} n^m + n^m$$
$$= \sum_{k \in \mathbf{N}_{0,m-1}} \Big(\sum_{l \in \mathbf{N}_{k+1,m+1}} (-1)^{l-k} \binom{l}{k} c_l^{(m)} \Big) n^k + (1 - (m+1) c_{m+1}^{(m)}) n^m$$
$$= \sum_{k \in \mathbf{N}_{0,m-1}} a_k^{(m)} n^k + a_m^{(m)} n^m = \sum_{k \in \mathbf{N}_{0,m}} a_k^{(m)} n^k \quad \text{for all } n \in \mathbf{N}_2$$

が得られ, 命題 7.1 によって

$$a_k^{(m)} = 0 \quad \text{for all } k \in \mathbf{N}_{0,m}$$

が成り立つ. 従って,

$$0 = a_m^{(m)} = 1 - (m+1) c_{m+1}^{(m)}, \ c_{m+1}^{(m)} = \frac{1}{m+1}$$

であり, $k-1 \in \mathbf{N}_{0,m-1}$ for $k \in \mathbf{N}_{1,m}$ であるから, 注意 4.1 によって

$$0 = a_{k-1}^{(m)} = \sum_{l \in \mathbf{N}_{(k-1)+1,m+1}} (-1)^{l-(k-1)} \binom{l}{k-1} c_l^{(m)}$$
$$= -\sum_{l \in \mathbf{N}_{k,m+1}} (-1)^{l-k} \binom{l}{k-1} c_l^{(m)}$$
$$= -(-1)^{k-k} \binom{k}{k-1} c_k^{(m)} - \sum_{l \in \mathbf{N}_{k+1,m+1}} (-1)^{l-k} \binom{l}{k-1} c_l^{(m)}$$
$$= -k c_k^{(m)} - \sum_{l \in \mathbf{N}_{k+1,m+1}} (-1)^{l-k} \binom{l}{k-1} c_l^{(m)},$$
$$c_k^{(m)} = -\frac{1}{k} \sum_{l \in \mathbf{N}_{k+1,m+1}} (-1)^{l-k} \binom{l}{k-1} c_l^{(m)} \quad \text{for } k \in \mathbf{N}_{1,m}$$

が得られる.

(b) $$(n+1)^m = \sum_{k \in \mathbf{N}_{0,m}} \binom{m}{k} n^k \quad \text{for } n \in \mathbf{N}$$

かつ $l \in \mathbf{N}$ に対して

$$(n+1)^l - n^l = \sum_{k \in \mathbf{N}_{0,l-1}} \binom{l}{k} n^k \quad \text{for } n \in \mathbf{N}$$

であり, (a) と同様にして

$$S_{n+1}^{(m)} = S_n^{(m)} + (n+1)^m \quad \text{for } n \in \mathbf{N}$$

が成り立つ. ここで,

$$b_k^{(m)} = \sum_{l \in \mathbf{N}_{k+1,m+1}} \binom{l}{k} c_l^{(m)} - \binom{m}{k} \quad \text{for } k \in \mathbf{N}_{0,m}$$

とおくと, $\{b_k^{(m)}\}_{k \in \mathbf{N}_{0,m}} \subset \mathbf{R}$ であり, 命題 1.2, 例 5.2 (ii) 及び命題 4.1, 注意 4.1 を用いると, (a) と同様にして

$$0 = S_{n+1}^{(m)} - S_n^{(m)} - (n+1)^m$$
$$= \sum_{l \in \mathbf{N}_{1,m+1}} \sum_{k \in \mathbf{N}_{0,l-1}} \binom{l}{k} c_l^{(m)} n^k - (n+1)^m$$
$$= \sum_{k \in \mathbf{N}_{0,m}} \sum_{l \in \mathbf{N}_{k+1,m+1}} \binom{l}{k} c_l^{(m)} n^k - \sum_{k \in \mathbf{N}_{0,m}} \binom{m}{k} n^k$$
$$= \sum_{k \in \mathbf{N}_{0,m}} b_k^{(m)} n^k \quad \text{for all } n \in \mathbf{N}$$

となるから, 命題 7.1 によって

$$b_k^{(m)} = 0 \quad \text{for all } k \in \mathbf{N}_{0,m}$$

が得られる. 従って,

$$0 = b_m^{(m)} = (m+1) c_{m+1}^{(m)} - 1, \ c_{m+1}^{(m)} = \frac{1}{m+1},$$
$$0 = b_{k-1}^{(m)} = k c_k^{(m)} + \sum_{l \in \mathbf{N}_{k+1,m+1}} \binom{l}{k-1} c_l^{(m)} - \binom{m}{k-1},$$
$$c_k^{(m)} = \frac{1}{k} \Big(\binom{m}{k-1} - \sum_{l \in \mathbf{N}_{k+1,m+1}} \binom{l}{k-1} c_l^{(m)} \Big) \quad \text{for } k \in \mathbf{N}_{1,m}$$

が成り立つ. □

例 4.1 と合わせると, 命題 1.4 が得られる.

命題 1.4 の証明. $(\mathrm{a})_{m+1}$ 命題 1.3 によって

$$c_{m+1}^{(m)} = \frac{1}{m+1}$$

が成り立つ.

$(\mathrm{a})_m$ 命題 1.3 及び $(\mathrm{a})_{m+1}$ によって

$$c_m^{(m)} = -\frac{1}{m} \sum_{l \in \mathbf{N}_{m+1,m+1}} (-1)^{l-m} \binom{l}{m-1} c_l^{(m)}$$
$$= -\frac{1}{m} (-1)^{(m+1)-m} \binom{m+1}{m-1} c_{m+1}^{(m)}$$
$$= \frac{1}{m} \frac{m(m+1)}{2} \frac{1}{m+1} = \frac{1}{2}$$

が成り立つ.

$(\mathrm{a})_k$ $k \in \mathbf{N}_{1,m-1}$ のとき,

$$\hat{\gamma}_k(i) = k + i \, (\in \mathbf{N}_{k+1,m+1}) \quad \text{for } i \in \mathbf{N}_{1,m-k+1}$$

によって $\hat{\gamma}_k \in \mathcal{B}(\mathbf{N}_{1,m-k+1}; \mathbf{N}_{k+1,m+1})$ が定義され, 補題 3.3, 例 4.1 によって

$$\sum_{l \in \mathbf{N}_{k+1,m+1}} \frac{1 + (-1)^{l-k}}{2} \binom{l}{k-1} c_l^{(m)}$$
$$= \sum_{i \in \mathbf{N}_{1,m-k+1}} \frac{1 + (-1)^{\hat{\gamma}_k(i)-k}}{2} \binom{\hat{\gamma}_k(i)}{k-1} c_{\hat{\gamma}_k(i)}^{(m)}$$
$$= \sum_{i \in \mathbf{N}_{1,m-k+1}} \frac{1 + (-1)^{(k+i)-k}}{2} \binom{k+i}{k-1} c_{k+i}^{(m)}$$

$$= \sum_{i\in\mathbf{N}_{1,m-k+1}} \frac{1+(-1)^i}{2}\binom{k+i}{k-1}c^{(m)}_{k+i}$$
$$= \sum_{j\in\mathbf{N}_{\lfloor(1+1)/2\rfloor,\lfloor(m-k+1)/2\rfloor}} \binom{k+2j}{k-1}c^{(m)}_{k+2j}$$
$$= \sum_{j\in\mathbf{N}_{1,\lfloor(m-k+1)/2\rfloor}} \binom{k+2j}{k-1}c^{(m)}_{k+2j}$$

が成り立つ. 従って, 命題 1.3 によって

$$k\,c^{(m)}_k = \frac{1}{2}(k\,c^{(m)}_k + k\,c^{(m)}_k)$$
$$= \frac{1}{2}\Big\{-\sum_{l\in\mathbf{N}_{k+1,m+1}}(-1)^{l-k}\binom{l}{k-1}c^{(m)}_l + \binom{m}{k-1} - \sum_{l\in\mathbf{N}_{k+1,m+1}}\binom{l}{k-1}c^{(m)}_l\Big\}$$
$$= \frac{1}{2}\binom{m}{k-1} - \sum_{l\in\mathbf{N}_{k+1,m+1}}\frac{1+(-1)^{l-k}}{2}\binom{l}{k-1}c^{(m)}_l$$
$$= \frac{1}{2}\binom{m}{k-1} - \sum_{j\in\mathbf{N}_{1,\lfloor(m-k+1)/2\rfloor}}\binom{k+2j}{k-1}c^{(m)}_{k+2j}$$

が得られ, 主張が成り立つ. □

最後に, 命題 1.5 を証明する.

命題 1.5 の証明. $l\in\mathbf{Z}$ に対し,

$$\gamma_l(i) = l-i\,(\in\mathbf{N}_{1,l})\quad \text{for } i\in\mathbf{N}_{0,l-1}$$

によって $\gamma_l\in\mathcal{B}(\mathbf{N}_{0,l-1};\mathbf{N}_{1,l})$ が定義される.

(i) $m\in\mathbf{N}_2$ とする.

(a) $l\in\mathbf{Z}$ とすると,

$$\begin{aligned}
&m+1-2l\in\mathbf{N}_{1,m-1}\\
\iff\ &1\le m+1-2l\le m-1\\
\iff\ &1\le l\le\frac{m}{2} \iff 1\le l\le\lfloor\frac{m}{2}\rfloor\\
\iff\ &l\in\mathbf{N}_{1,\lfloor m/2\rfloor}
\end{aligned}$$

が成り立つ.

(b) $l\in\mathbf{N}_{1,\lfloor m/2\rfloor}$ とすると, (a) によって $m+1-2l\in\mathbf{N}_{1,m-1}$ であり,

$$\lfloor\frac{m-(m+1-2l)+1}{2}\rfloor = \lfloor l\rfloor = l$$

が成り立つ. また, 補題 3.3 によって

$$\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,l}}\binom{m+1-2l+2j}{m-2l}c^{(m)}_{m+1-2l+2j}$$
$$= \sum_{i\in\mathbf{N}_{0,l-1}}\binom{m+1-2l+2\gamma_l(i)}{m-2l}c^{(m)}_{m+1-2l+2\gamma_l(i)}$$
$$= \sum_{i\in\mathbf{N}_{0,l-1}}\binom{m+1-2l+2(l-i)}{m-2l}\cdot c^{(m)}_{m+1-2l+2(l-i)}$$
$$= \sum_{i\in\mathbf{N}_{0,l-1}}\binom{m+1-2i}{m-2l}c^{(m)}_{m+1-2i}$$

となるから, 命題 1.4 によって

$$(m+1-2l)\,c^{(m)}_{m+1-2l}$$
$$= \frac{1}{2}\binom{m}{(m+1-2l)-1} - \sum_{j\in\mathbf{N}_{1,\lfloor(m-(m+1-2l)+1)/2\rfloor}}\binom{(m+1-2l)+2j}{(m+1-2l)-1}\cdot c^{(m)}_{(m+1-2l)+2j}$$
$$= \frac{1}{2}\binom{m}{m-2l} - \sum_{j\in\mathbf{N}_{1,l}}\binom{m+1-2l+2j}{m-2l}c^{(m)}_{m+1-2l+2j}$$
$$= \frac{1}{2}\binom{m}{m-2l} - \sum_{i\in\mathbf{N}_{0,l-1}}\binom{m+1-2i}{m-2l}c^{(m)}_{m+1-2i}$$

が得られ, 主張が従う.

(ii) $m\in\mathbf{N}_3$ とする.

(a) $l\in\mathbf{Z}$ とすると,

$$\begin{aligned}
&m-2l\in\mathbf{N}_{1,m-2}\\
\iff\ &1\le m-2l\le m-2\\
\iff\ &\frac{1}{2}\le l\le\frac{m-1}{2} \iff 1\le l\le\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor\\
\iff\ &l\in\mathbf{N}_{1,\lfloor(m-1)/2\rfloor}
\end{aligned}$$

が成り立つ.

(b) $l\in\mathbf{N}_{1,\lfloor(m-1)/2\rfloor}$ とすると, (a) によって $m-2l\in\mathbf{N}_{1,m-2}\subset\mathbf{N}_{1,m-1}$ であり,

$$\lfloor\frac{m-(m-2l)+1}{2}\rfloor = \lfloor l+\frac{1}{2}\rfloor = l$$

が成り立つ. また, 補題 3.3 によって

$$\sum_{j\in\mathbf{N}_{1,l}}\binom{m-2l+2j}{m-1-2l}c^{(m)}_{m-2l+2j}$$
$$= \sum_{i\in\mathbf{N}_{0,l-1}}\binom{m-2l+2\gamma_l(i)}{m-1-2l}c^{(m)}_{m-2l+2\gamma_l(i)}$$
$$= \sum_{i\in\mathbf{N}_{0,l-1}}\binom{m-2l+2(l-i)}{m-1-2l}c^{(m)}_{m-2l+2(l-i)}$$
$$= \sum_{i\in\mathbf{N}_{0,l-1}}\binom{m-2i}{m-1-2l}c^{(m)}_{m-2i}$$

となるから, 命題 1.4 によって

$$(m-2l)\,c^{(m)}_{m-2l}$$
$$= \frac{1}{2}\binom{m}{(m-2l)-1} - \sum_{j\in\mathbf{N}_{1,\lfloor(m-(m-2l)+1)/2\rfloor}}\binom{(m-2l)+2j}{(m-2l)-1}\cdot c^{(m)}_{(m-2l)+2j}$$
$$= \frac{1}{2}\binom{m}{m-1-2l} - \sum_{j\in\mathbf{N}_{1,l}}\binom{m-2l+2j}{m-1-2l}c^{(m)}_{m-2l+2j}$$

$$= \frac{1}{2}\binom{m}{m-1-2l} - \sum_{i \in \mathbf{N}_{0,l-1}} \binom{m-2i}{m-1-2l} c_{m-2i}^{(m)}$$

が得られる.

$(\mathrm{b})_1$ $l=1$ のとき, 命題 1.4 によって

$$\begin{aligned}
&(m-2)\, c_{m-2}^{(m)} \\
&= \frac{1}{2}\binom{m}{m-3} - \sum_{i \in \mathbf{N}_{0,0}} \binom{m-2i}{m-3} c_{m-2i}^{(m)} \\
&= \frac{1}{2}\binom{m}{m-3} - \binom{m}{m-3} c_m^{(m)} \\
&= \frac{1}{2}\binom{m}{m-3} - \binom{m}{m-3} \frac{1}{2} = 0
\end{aligned}$$

となるから, $c_{m-2}^{(m)} = 0$ が成り立つ.

$(\mathrm{b})_l$ $l \in \mathbf{N}_{2,\lfloor (m-1)/2 \rfloor}$ とし,

$$c_{m-2i}^{(m)} = 0 \quad \text{for all } i \in \mathbf{N}_{1,l-1}$$

が成り立つと仮定する. このとき, 注意 4.1, 命題 1.4 によって

$$\begin{aligned}
&(m-2l)\, c_{m-2l}^{(m)} \\
&= \frac{1}{2}\binom{m}{m-1-2l} - \sum_{i \in \mathbf{N}_{0,l-1}} \binom{m-2i}{m-1-2l} c_{m-2i}^{(m)} \\
&= \frac{1}{2}\binom{m}{m-1-2l} - \binom{m}{m-1-2l} c_m^{(m)} - \sum_{i \in \mathbf{N}_{1,l-1}} \binom{m-2i}{m-1-2l} c_{m-2i}^{(m)} \\
&= \frac{1}{2}\binom{m}{m-1-2l} - \binom{m}{m-1-2l} \frac{1}{2} = 0
\end{aligned}$$

となるから, $c_{m-2l}^{(m)} = 0$ が成り立つ. $\square$

謝辞. 査読者から, 関連する文献や結果に関する有益な教示をいただきました. 深く感謝致します.

(令和６年２月２日受理)

参考文献.

1. 荒川 恒男, 伊吹山 知義, 金子 昌信, ベルヌーイ数とゼータ関数, 牧野書店, 2001.
2. 藤原 耕二 ほか 55 名, 数学 B, 啓林館, 2022.
3. 俣野 博, 河野 俊丈 編, 数学 B, 東京書籍, 2014.
4. 俣野 博, 河野 俊丈 ほか 50 名, 数学 B Standard, 東京書籍, 2023.
5. 森口 繁一, 宇田川 銈久, 一松 信, 岩波 数学公式 Ⅱ 級数・フーリエ解析, 岩波書店, 1957.
6. 尾畑 伸明, 集合･写像･数の体系 数学リテラシーとして, 牧野書店, 2019.
7. 佐武 一郎, 線型代数学, 数学選書 1, 裳華房, 1958.
8. 高橋 陽一郎 編, 詳説 数学 B, 啓林館, 2012.

On a derivation of formula for sum of powers of positive integers

SATO Tokushi

Abstract:

The formula for sum of powers of positive integers is treated in Mathematics B of Japanese high school mathematics in the case that the exponent of the power is less than or equal to 3. In this paper, we will discuss the case with a general exponent of the power, and explain how to derive the formula, by using a simple method that even high school and university students can understand in principle. To this end, we will use properties concerned with exchanging the order of the sum of real numbers with respect to two types of indices, which will also be explained.

Key Words : sum of powers of positive integers, finite set, finite sum of real numbers, exchanging the order of sum of real numbers

＊ Analysis, Division of Science, Mathematics and Human Life Science, Faculty of Education,Miyagi University of Education