Darboux の定理と関数の Riemann 積分可能性について

*佐　藤　得　志

On Darboux's theorem and integrability of functions in the sense of Riemann

SATO Tokushi

要　旨

Riemann 積分の定義の方法には主に 2 つの流儀があり, それは, Riemann 和から定義するものと, Darboux の上積分, 下積分から定義するものである. この 2 つの定義の同値性を証明するための鍵となるのが Darboux の定理であるが, その証明は Riemann 積分の理論の中では最も難しいものである. 本稿においては, 初学者の理解の手助けとなるように, Darboux の定理の厳密かつ丁寧な証明を与える. また, 積分可能な関数と Lipschitz 連続な関数の合成関数の積分可能性を証明し, これを用いて積分可能な関数の絶対値や積の積分可能性を導く.

Key Words : Riemann 積分
Darboux の定理
合成関数
Lipschitz 連続

---

*　宮城教育大学数学教育講座

1. 序

高校の数学では,「数学 II」において微分, 積分を初めて学習し, そこで極限の概念が登場するが, 本格的に極限について学習するのは「数学 III」においてであろう. しかし, 致し方ないことではあるが, 高校の数学では極限の概念は直感的にしか扱われていない. また, 積分に関しては, 本来の Riemann (リーマン) 積分の話には触れることなく, 原始関数に関する事柄のみを扱い, それを基にして面積や体積の計算方法を学ぶことになる. 実際には, (被積分) 関数が連続である場合には, 微分積分学の基本定理により, その Riemann 積分を原始関数を用いて計算できるので, 結果的には正しいことを学習していることになる.

本学の学部 1 年次の「微分積分学 A」においては, 実数や極限の概念を明確にした上で, 高校で学習した微分, 積分の理論をより厳密に学習し直すことになり, そこで初めて Riemann 積分の概念が登場する. これは, 有界閉区間上で定義された有界関数に対して定義されるものであるが, その定義の方法については主に 2 つの流儀があり, 大学生向けの微分積分学の教科書では, そのいずれかに従って書かれているものが多い.

第 1 の流儀は, 区間の分割の大きさを小さくしたときの関数の Riemann 和の極限が存在するときに, この関数が積分可能であると定義し, その積分の値を Riemann 和の極限として定義するものである (黒田 (2002), 御園生 · 望月 · 金子 · 内山 (1989), 中村 · 今井 · 清水 (2003), 赤 (2014), 高木 (1983), 浦川 (2006), 雪江 (2008) 等). このとき, 連続関数に対しては (この意味での) 積分可能性は比較的容易に証明することができる. また, 正値連続関数に関しては, 積分の値はその関数から定まる図形の面積 (2 次元 Jordan (ジョルダン) 測度) を与えることが分かるが, この事実は Riemann 和の定義から直感的に理解できる性質である. 大学生向けの微分積分学の教科書では, Riemann 積分に関しては, 連続関数に対してのみ記述されているものも多い (中村 · 今井 · 清水 (2003), 浦川 (2006), 雪江 (2008) 等).

第 2 の流儀は, 関数の Darboux (ダルブー) の上積分と下積分が一致するときに, この関数が積分可能であると定義し, 積分の値を上積分と下積分の共通の値として定義するというものである (小池 (2010), 三村 (1970), 鈴木 · 山田 · 柴田 · 田中 (2007) 等). この流儀に従っても, 連続関数の積分可能性は容易に証明することができるのであるが, この流儀は一般の (連続とは限らない) 積分可能な関数について議論するのに適している. Darboux の上積分, 下積分を定義する際に, Riemann 上和, 下和を用いるのであるが, これらの概念は Riemann 和の極端な場合のものと見做すことができ, 正値の連続関数の場合にその積分 (Darboux の上積分または下積分) の値が上述のような図形の面積を与えることも, やはり直感的に理解できるものである.

第 1 の流儀で一般の (連続とは限らない) 積分可能な関数について議論する場合, 第 2 の流儀での積分可能性との同値性を証明してこれを用いるのが通常である. その同値性 (特に十分性) を証明するための鍵となるのが Darboux の定理である. Darboux の定理の証明は, 独特の証明方法をとるため, Riemann 積分の理論の中では最も難しいものと言ってよいであろう. 勿論, Darboux の定理の証明を記述してある教科書はいくつもあるが (黒田 (2002), 御園生 · 望月 · 金子 · 内山 (1989), 赤 (2014), 高木 (1983) 等), その証明を数学的にきちんと記述されていないことも多く, 初学者がこれを理解するのは必ずしも容易でないように思う.

一方, 第 2 の流儀に従った場合, 第 1 の流儀との関係については述べないという立場をとると, Darboux の定理に触れる必要がないので, Riemann 積分の理論を簡明にできることになる. しかし, 従来の Riemann 積分の定義の方法は, 定義域が (1 次元の) 区間であれば, 一般に (有限次元の) vector 空間やもっと一般に Banach (バナッハ) 空間に値をとるような連続写像に対しても容易に拡張できるという利点がある. 複素関数の線積分などはこの方法に基いて定義されるものである. その意味では, 連続な関数や写像を扱うという立場においては, 第 1 の流儀も重要であると言ってよいであろう.

本稿においては, 第 1 の流儀に従って議論することとする. ここでは, 初学者の理解のための手助けとなるように, なるべく厳密に議論できるような記号を導入して Riemann 積分の理論 (の一部) を再論し, 改めて Darboux の定理の厳密かつ丁寧な証明を与え, これを用いて Darboux の上積分, 下積分が一致するという性質との同値性を証明する. ここで用いる記号は, 他の教科書のものと比較して煩雑に見えるかもしれないが, 議論を厳密に行うために敢えてこのような記号を用いることとした. (本稿では, 連続関数の Riemann 積分可能性については, Darboux の定理を経由して証明するが, これを用いない直接的な証明については述べない.)

更に, Riemann 積分可能な関数と Lipschitz (リプシッツ) 連続な関数の合成関数の Riemann 積分可能性について述べる. この事実は, さほど難しいものとも思われないが, これについて言及している教科書は (何故か) 見当たらない. これを用いると, 特に, 積分可能な関数の絶対値, 及び, 積分可能な関数と C^1-級関数の合成関数の Riemann 積分可能性も導かれる. 更に, 2 つの Riemann 積分可能な関数の積の Riemann 積分可能性も証明できる. (積分可能な関数の絶対値 (小池 (2010), 黒田 (2002), 三村 (1970), 御園生 · 望月 · 金子 · 内山 (1989), 赤 (2014), 鈴木 · 山田 · 柴田 · 田中 (2007) 等) や 2 つの積分可能な関数の積 (三村 (1970), 鈴木 · 山田 · 柴田 · 田中 (2007) 等) の積分可能性について個別に証明している教科書は存在する.)

但し, ここでは関数の Riemann 積分可能性という数学的事実を証明しているだけであって, 関数の積分の新たな計算方法などを提案しているわけではない. また, (被積分) 関数に連続性を仮定すれば, その合成関数や積は再び連続となるので, ここでの議論を用いるまでもなく, それらは Riemann 積分可能である.

これらの性質は, Lebesgue (ルベーグ) 積分の理論を用いれば容易に得られる事実である. 即ち, 有界閉区間上の関数が Riemann 積分可能であるための必要十分条件は, これが (Lebesgue 測度の意味で) 殆ど至る所で連続となることである, という事実を用いれば, 上に述べた性質を容易に証明することができる. しかしながら, Lebesgue 積分の理論は Riemann 積分の理論に比べて遥かに難しいため, (少なくとも本学では) 学部教育の段階でそこまで至ることは至難である. 従って, このような基本的な数学的事実を, より初等的な理論を用いて証明することは, 意義のあることと思う.

なお, 本稿の内容は「微分積分学 A」の講義内容の一部となっているが, 同様の内容の資料を受講者に配布し, 学習教材として提供している.

以下, $\mathbf{R}$ は実数全体の集合を表す. $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ はそれぞれ自然数全体, 整数全体の集合を表すこととし,

$$\mathbf{N}_{l,m} = \{\, k \in \mathbf{Z} \mid l \le k \le m \,\} \,(= \mathbf{Z} \cap [\, l,m \,]\,) \quad \text{for } l \le m \in \mathbf{Z}$$

とおく. また, $a < b \in \mathbf{R}$ に対し, 開区間 (a,b) の長さを

$$\ell\,[(a,b)] = b - a\,(\in (0,\infty))$$

と表すことにする. また, 本文中で用いるため, 次の関数を定義しておく.

定義 1.1. $m \in \mathbf{N}$ とする.

(i) $\iota(x) = x,\ \iota_{\pm}(x) = x_{\pm} = \max\{0, \pm\, x\},$
$[|\iota|](x) = |x| = \max\{x, -\,x\} \quad \text{for } x \in \mathbf{R}$

によって $\iota, \iota_{\pm}, |\iota| : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を定義する (複号同順).

(ii) $\iota^0(x) = 1,\ \iota^m(x) = x^m \qquad \text{for } x \in \mathbf{R}$

によって $\iota^0, \iota^m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を定義する.

(iii) $\iota^{-m}(x) = \dfrac{1}{\iota^m(x)} = \dfrac{1}{x^m}$
$\text{for } x \in \mathbf{R}\backslash\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

によって $\iota^{-m} : \mathbf{R}\backslash\{0\} \to \mathbf{R}$ を定義する. □

x_+, x_- をそれぞれ x の正の部分, 負の部分という. これに関して次が成り立つことに注意しておく.

注意 1.1. (i)
$$\begin{aligned} \iota(x) &= x = x_+ - x_- \\ &= \iota_+(x) - \iota_-(x), \\ [|\iota|](x) &= |x| = x_+ + x_- \\ &= \iota_+(x) + \iota_-(x) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} |\iota_{\pm}(x_0) - \iota_{\pm}(x_1)| &= |(x_0)_{\pm} - (x_1)_{\pm}| \\ &\le |x_0 - x_1|, \end{aligned}$$
$$|[|\iota|](x_0) - [|\iota|](x_1)| = ||x_0| - |x_1|| \le |x_0 - x_1|$$
$\text{for } x_0, x_1 \in \mathbf{R}$ (複号同順). □

2. 積分の定義と簡単な性質

以下, $\bar{a} < \bar{b} \in \mathbf{R}$ とし, $I = (\bar{a}, \bar{b})$ を有界開区間 ($\bar{I} = [\bar{a}, \bar{b}]$ は有界閉区間) とする. 積分の定義を述べるため, その準備として, 区間の分割及び Riemann 和を定義する.

定義 2.1. (i)
$$\begin{aligned} \Delta &= (I^{(k)}[\Delta])_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} \\ &= (I^{(1)}[\Delta], I^{(2)}[\Delta], \ldots, I^{(\nu[\Delta])}[\Delta]) \end{aligned}$$

が I の分割であるとは, ($\nu[\Delta] \in \mathbf{N}$ であって)

$$\begin{aligned} \bar{a} = a^{(0)}[\Delta] < a^{(1)}[\Delta] < a^{(2)}[\Delta] < \cdots \\ < a^{(\nu[\Delta]-1)}[\Delta] < a^{(\nu[\Delta])}[\Delta] = \bar{b}, \end{aligned}$$
$$I^{(k)}[\Delta] = (a^{(k-1)}[\Delta], a^{(k)}[\Delta]) \quad \text{for } k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}$$

(各 $I^{(k)}[\Delta]$ は開区間) と表されることである. このとき, 各 $a^{(k)}[\Delta]$ を Δ の分点といい,

$$\begin{aligned} |\Delta| &= \max_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} \ell\,[I^{(k)}[\Delta]] \\ &= \max_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} (a^{(k)}[\Delta] - a^{(k-1)}[\Delta]) \end{aligned}$$

を Δ の大きさという. また,

$$\bar{I}^{(k)}[\Delta] = [a^{(k-1)}[\Delta], a^{(k)}[\Delta]],$$
$$\tilde{I}^{(k)}[\Delta] = (a^{(k-1)}[\Delta], a^{(k)}[\Delta]] \quad \text{for } k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}$$

と表すことにする (従って,

$$\bar{I}^{(k)}[\Delta] = \overline{I^{(k)}[\Delta]} \quad \text{for } k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}$$

(右辺は $I^{(k)}[\Delta]$ の閉包) である). また,

$$\begin{aligned} Z[\Delta] = \bigl\{ \xi &= (\xi^{(k)})_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} \\ &= (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(\nu[\Delta])}) \mid \\ &\quad \xi^{(k)} \in \bar{I}^{(k)}[\Delta] \ \text{ for } k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]} \bigr\} \\ (&= \bar{I}^{(1)}[\Delta] \times \bar{I}^{(2)}[\Delta] \times \cdots \times \bar{I}^{(\nu[\Delta])}[\Delta]) \end{aligned}$$

とおく.

(ii) I の分割全体の集合を $\mathcal{P}[I]$ と表す. (従って, Δ が I の分割であることは $\Delta \in \mathcal{P}[I]$ と表される.) □

注意 2.1. (i) I の有限部分集合 $A (\subset I)$ に対し, $A \cup \{\bar{a}, \bar{b}\}$ を分点 (全体) の集合とするような I の分割が (唯一つ) 存在する.

(ii) $\Delta \in \mathcal{P}[I]$ とするとき, これを Δ の分点の集合 $\{a^{(k)}[\Delta]\}_{k \in \mathbf{N}_{0,\nu[\Delta]}}$ と同一視し,

$$\begin{aligned} \Delta : \bar{a} = a^{(0)}[\Delta] < a^{(1)}[\Delta] < a^{(2)}[\Delta] < \cdots \\ < a^{(\nu[\Delta]-1)}[\Delta] < a^{(\nu[\Delta])}[\Delta] = \bar{b} \end{aligned}$$

と表すこともある. □

定義 2.2. $f : \bar{I} \to \mathbf{R}$ とするとき, $\Delta \in \mathcal{P}[I]$ 及び $\xi = (\xi^{(k)})_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} \in Z[\Delta]$ に対し,

$$\begin{aligned} S[f;\Delta,\xi] &= \sum_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} f(\xi^{(k)}) \ell[I^{(k)}[\Delta]] \\ &= \sum_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} f(\xi^{(k)})(a^{(k)}[\Delta] - a^{(k-1)}[\Delta]) \end{aligned}$$

を f の Riemann 和という. □

注意 2.2. $\Delta \in \mathcal{P}[I]$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} \ell[I^{(k)}[\Delta]] &= \sum_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} (a^{(k)}[\Delta] - a^{(k-1)}[\Delta]) \\ &= a^{(\nu[\Delta])}[\Delta] - a^{(0)}[\Delta] \\ &= \bar{b} - \bar{a} = \ell[I] \end{aligned}$$

が成り立つ. □

これを用いて, 関数 $f : \bar{I} \to \mathbf{R}$ の積分可能性が定義される.

定義 2.3. $f : \bar{I} \to \mathbf{R}$ が $\bar{I}$ 上で積分可能であるとは, ある $S \in \mathbf{R}$ が存在して, 次をみたすことである.

(i) f は $\bar{I}$ 上で有界である.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} &\Delta \in \mathcal{P}[I],\ |\Delta| \le \delta_\varepsilon,\ \xi \in Z[\Delta] \\ &\quad \Rightarrow \ |S[f;\Delta,\xi] - S| \le \varepsilon \end{aligned}$$

をみたす. (このことを, $S[f;\Delta,\xi] \to S \ \text{ as } |\Delta| \to 0$ とも表す.)

このとき, 極限値 S を f の $\bar{I}$ 上での積分 (Riemann 積分) といい,

$$S = \int_{\bar{I}} f(t)dt = \int_{[\bar{a},\bar{b}]} f(t)dt = \int_{\bar{I}} f(x)dx$$

等と表す. □

いま, 最も簡単な例を挙げる.

例 2.1. $\iota^0(x) \,(= [\iota^0|_{\bar{I}}](x)) = 1 \quad \text{for } x \in \bar{I} = [\bar{a}, \bar{b}]$ は $\bar{I}$ 上で積分可能であり,

$$\int_{\bar{I}} \iota^0(t)dt = \int_{\bar{I}} 1\,dt \left(= \int_{\bar{I}} dt \right) = \ell[I] = \bar{b} - \bar{a}$$

が成り立つ.

証明. $\Delta \in \mathcal{P}[I]$, $\xi = (\xi^{(k)})_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} \in Z[\Delta]$ とすると, 注意 2.2 によって

$$\begin{aligned} S[\iota^0|_{\bar{I}};\Delta,\xi] &= \sum_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} \iota^0(\xi^{(k)}) \ell[I^{(k)}[\Delta]] \\ &= \sum_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} \ell[I^{(k)}[\Delta]] = \ell[I] \\ &\to \ell[I] \quad \text{as } |\Delta| \to 0 \end{aligned}$$

が得られる. □

次に, 定義から比較的容易に得られる積分の性質について述べる.

定理 2.1. $f, g : \bar{I} \to \mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で積分可能とし, $\gamma \in \mathbf{R}$ とすると, 次が成り立つ.

(i) $f+g, \gamma f : \bar{I} \to \mathbf{R}$ も $\bar{I}$ 上で積分可能であり,

$$\int_{\bar{I}} (f(t)+g(t))dt = \int_{\bar{I}} f(t)dt + \int_{\bar{I}} g(t)dt,$$
$$\int_{\bar{I}} \gamma f(t)dt = \gamma \int_{\bar{I}} f(t)dt.$$

(ii) $f(x) \le g(x) \ \text{ for all } x \in \bar{I}$ ならば,

$$\int_{\bar{I}} f(t)dt \le \int_{\bar{I}} g(t)dt.$$

証明. (i) $S[f+g;\Delta,\xi] = S[f;\Delta,\xi] + S[g;\Delta,\xi]$,

$$S[\gamma f;\Delta,\xi] = \gamma S[f;\Delta,\xi]$$
$$\text{for } \Delta \in \mathcal{P}[I],\ \xi \in Z[\Delta]$$

であるから, $|\Delta| \to 0$ とすると, 主張が得られる.

(ii) $f(x) \le g(x) \ \text{ for all } x \in \bar{I}$ のとき,

$$S[f;\Delta,\xi] \le S[g;\Delta,\xi] \quad \text{for } \Delta \in \mathcal{P}[I],\ \xi \in Z[\Delta]$$

であるから, $|\Delta| \to 0$ とすると, 主張が得られる. $\square$

3. Darboux の上積分, 下積分

次に, Darboux の上積分, 下積分を用いて有界閉区間上の関数の積分可能性について調べる.

注意 3.1. $f : \bar{I} \to \mathbf{R}$, $A \subset \bar{I}$ とする.

(i) $$f(A) = \{\, f(x) \in \mathbf{R} \mid x \in A \,\}\,(\subset \mathbf{R})$$

は A の f による像を表す.

(ii) $$\sup f(A) = \sup_{x \in A} f(x),\ \ \inf f(A) = \inf_{x \in A} f(x)$$

は $f(A)$ の上限, 下限を表す. f の A における最大値, 最小値が存在するとき, これらを

$$\max f(A) = \max_{x \in A} f(x),\ \ \min f(A) = \min_{x \in A} f(x)$$

と表すが, このとき

$$\max f(A) = \sup f(A),\ \ \min f(A) = \inf f(A)$$

が成り立つ. $\square$

まず, Riemann 上和, Riemann 下和を定義する.

定義 3.1. $f : \bar{I} \to \mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で有界とし, $\Delta \in \mathcal{P}[I]$ とするとき,

$$\bar{S}[f\,;\Delta] = \sum_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} (\sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta]))\,\ell[I^{(k)}[\Delta]],$$
$$\underline{S}[f\,;\Delta] = \sum_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} (\inf f(\bar{I}^{(k)}[\Delta]))\,\ell[I^{(k)}[\Delta]]$$

をそれぞれ f の Riemann 上和, Riemann 下和という. $\square$

注意 3.2. $f : \bar{I} \to \mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で有界とし, $\Delta \in \mathcal{P}[I]$ とする.

(i) $\bar{S}[f\,;\Delta]$, $\underline{S}[f\,;\Delta]$ は必ずしも f の Riemann 和ではない.

(ii) $$\underline{S}[f\,;\Delta] \le S[f\,;\Delta,\xi] \le \bar{S}[f\,;\Delta] \quad \text{for all } \xi \in Z[\Delta].$$

(iii) $$\bar{S}[-f\,;\Delta] = -\underline{S}[f\,;\Delta],$$
$$\underline{S}[-f\,;\Delta] = -\bar{S}[f\,;\Delta].$$ $\square$

Riemann 上和, Riemann 下和の性質を調べるため, 区間の分割の細分を定義する.

定義 3.2. $\Delta, \tilde{\Delta} \in \mathcal{P}[I]$ とするとき, $\tilde{\Delta}$ が Δ の細分であるとは,

$$\{a^{(k)}[\Delta]\}_{k \in \mathbf{N}_{0,\nu[\Delta]}} \subset \{a^{(j)}[\tilde{\Delta}]\}_{j \in \mathbf{N}_{0,\nu[\tilde{\Delta}]}}$$

をみたすことである. $\square$

注意 3.3. $\Delta, \tilde{\Delta} \in \mathcal{P}[I]$ とするとき, $\tilde{\Delta}$ が Δ の細分ならば, $\{j_k[\Delta,\tilde{\Delta}]\}_{k \in \mathbf{N}_{0,\nu[\Delta]}} \subset \mathbf{N}_{0,\nu[\tilde{\Delta}]}$ が存在して,

$$\begin{aligned} 0 = j_0[\Delta,\tilde{\Delta}] &< j_1[\Delta,\tilde{\Delta}] < j_2[\Delta,\tilde{\Delta}] < \cdots \\ &< j_{\nu[\Delta]-1}[\Delta,\tilde{\Delta}] < j_{\nu[\Delta]}[\Delta,\tilde{\Delta}] = \nu[\tilde{\Delta}], \end{aligned}$$
$$a^{(k)}[\Delta] = a^{(j_k[\Delta,\tilde{\Delta}])}[\tilde{\Delta}] \quad \text{for } k \in \mathbf{N}_{0,\nu[\Delta]}$$

をみたす. $\square$

まず, 次を示す.

命題 3.1. $f : \bar{I} \to \mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で有界, $\Delta, \tilde{\Delta} \in \mathcal{P}[I]$ とし, $\tilde{\Delta}$ を Δ の細分とすると,

$$\underline{S}[f\,;\Delta] \le \underline{S}[f\,;\tilde{\Delta}] \le \bar{S}[f\,;\tilde{\Delta}] \le \bar{S}[f\,;\Delta]$$

が成り立つ.

証明. (i) 注意 3.2 (ii) より, $\underline{S}[f\,;\tilde{\Delta}] \le \bar{S}[f\,;\tilde{\Delta}]$ が成り立つ.

(ii) 注意 3.3 の記号を用いると,

$$\begin{aligned} \bar{I}^{(j)}[\tilde{\Delta}] &= [a^{(j-1)}[\tilde{\Delta}], a^{(j)}[\tilde{\Delta}]] \\ &\subset [a^{(j_{k-1}[\Delta,\tilde{\Delta}])}[\tilde{\Delta}], a^{(j_k[\Delta,\tilde{\Delta}])}[\tilde{\Delta}]] \\ &= [a^{(k-1)}[\Delta], a^{(k)}[\Delta]] = \bar{I}^{(k)}[\Delta], \end{aligned}$$
$$f(\bar{I}^{(j)}[\tilde{\Delta}]) \subset f(\bar{I}^{(k)}[\Delta])$$
$$\text{for } j \in \mathbf{N}_{j_{k-1}[\Delta,\tilde{\Delta}]+1,\, j_k[\Delta,\tilde{\Delta}]},\ k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}$$

であるから,

$$\sup f(\bar{I}^{(j)}[\tilde{\Delta}]) \le \sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta])$$
$$\text{for } j \in \mathbf{N}_{j_{k-1}[\Delta,\tilde{\Delta}]+1,\, j_k[\Delta,\tilde{\Delta}]},\ k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}$$

が成り立つ. ここで,

$$j_0[\Delta,\tilde{\Delta}] = 0,\ j_{\nu[\Delta]}[\Delta,\tilde{\Delta}] = \nu[\tilde{\Delta}]$$

であり,

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in \mathbf{N}_{j_{k-1}[\Delta,\tilde{\Delta}]+1,\, j_k[\Delta,\tilde{\Delta}]}} \ell[I^{(j)}[\tilde{\Delta}]] \\ &= \sum_{j \in \mathbf{N}_{j_{k-1}[\Delta,\tilde{\Delta}]+1,\, j_k[\Delta,\tilde{\Delta}]}} (a^{(j)}[\tilde{\Delta}] - a^{(j-1)}[\tilde{\Delta}]) \\ &= a^{(k)}[\Delta] - a^{(k-1)}[\Delta] = \ell[I^{(k)}[\Delta]] \\ &\qquad \text{for } k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} &\bar{S}[f\,;\tilde{\Delta}] \\ &= \sum_{j \in \mathbf{N}_{1,\nu[\tilde{\Delta}]}} (\sup f(\bar{I}^{(j)}[\tilde{\Delta}]))\,\ell[I^{(j)}[\tilde{\Delta}]] \\ &= \sum_{j \in \mathbf{N}_{j_0[\Delta,\tilde{\Delta}]+1,\, j_{\nu[\Delta]}[\Delta,\tilde{\Delta}]}} (\sup f(\bar{I}^{(j)}[\tilde{\Delta}]))\,\ell[I^{(j)}[\tilde{\Delta}]] \\ &= \sum_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} \sum_{j \in \mathbf{N}_{j_{k-1}[\Delta,\tilde{\Delta}]+1,\, j_k[\Delta,\tilde{\Delta}]}} \\ &\qquad (\sup f(\bar{I}^{(j)}[\tilde{\Delta}]))\,\ell[I^{(j)}[\tilde{\Delta}]] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} \sum_{j \in \mathbf{N}_{j_{k-1}[\Delta,\tilde{\Delta}]+1,\, j_k[\Delta,\tilde{\Delta}]}} \\
&\qquad\qquad (\sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta]))\,\ell[I^{(j)}[\tilde{\Delta}]] \\
&= \sum_{k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}} (\sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta]))\,\ell[I^{(k)}[\Delta]] \\
&= \overline{S}[f;\Delta]
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

(iii)　(ii) 及び注意 3.2 (iii) により,

$$\underline{S}[f;\Delta] = -\overline{S}[-f;\Delta] \leq -\overline{S}[-f;\tilde{\Delta}] = \underline{S}[f;\tilde{\Delta}]$$

が成り立つ. □

更に, 区間の分割が 2 つ与えられたとき, それらの細分となる分割を定義する.

定義 3.3.　$\Delta, \tilde{\Delta} \in \mathcal{P}[I]$ とするとき,

$$\{a^{(k)}[\Delta]\}_{k \in \mathbf{N}_{0,\nu[\Delta]}} \cup \{a^{(j)}[\tilde{\Delta}]\}_{j \in \mathbf{N}_{0,\nu[\tilde{\Delta}]}}$$

を分点 (全体) の集合とするような $\bar{I}$ の分割を $\Delta \wedge \tilde{\Delta} \in \mathcal{P}[I]$ と表す. ($\Delta \wedge \tilde{\Delta}$ は Δ の細分かつ $\tilde{\Delta}$ の細分である.) □

これらを用いると, 次が得られる.

命題 3.2.　$f : \bar{I} \to \mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で有界, $\Delta, \tilde{\Delta} \in \mathcal{P}[I]$ とすると,

$$\underline{S}[f;\Delta] \leq \overline{S}[f;\tilde{\Delta}]$$

が成り立つ.

証明.　$\Delta \wedge \tilde{\Delta} \in \mathcal{P}[I]$ は Δ の細分かつ $\tilde{\Delta}$ の細分であるから, 命題 3.1 によって

$$\underline{S}[f;\Delta] \leq \underline{S}[f;\Delta \wedge \tilde{\Delta}] \leq \overline{S}[f;\Delta \wedge \tilde{\Delta}] \leq \overline{S}[f;\tilde{\Delta}]$$

が得られる. □

Darboux の上積分, 下積分は次によって定義される.

定義 3.4.　$f : \bar{I} \to \mathbf{R}$ が $\bar{I}$ 上で有界であるとき,

$$\overline{S}[f] = \inf_{\Delta \in \mathcal{P}[I]} \overline{S}[f;\Delta],\ \underline{S}[f] = \sup_{\Delta \in \mathcal{P}[I]} \underline{S}[f;\Delta]$$

をそれぞれ f の (Darboux の意味での) 上積分, 下積分という. □

注意 3.4.　$f : \bar{I} \to \mathbf{R}$ が $\bar{I}$ 上で有界であるとき,

$$\overline{S}[-f] = -\underline{S}[f],\ \underline{S}[-f] = -\overline{S}[f]$$

が成り立つ. □

これに関して, 次が成り立つ.

命題 3.3.　$f : \bar{I} \to \mathbf{R}$ が $\bar{I}$ 上で有界ならば,

$$\underline{S}[f] \leq \overline{S}[f]$$

が成り立つ.

証明.　$\Delta \in \mathcal{P}[I]$ とすると, 命題 3.2 によって

$$\underline{S}[f;\Delta] \leq \overline{S}[f;\tilde{\Delta}] \quad \text{for all } \tilde{\Delta} \in \mathcal{P}[I]$$

であるから,

$$\underline{S}[f;\Delta] \leq \inf_{\tilde{\Delta} \in \mathcal{P}[I]} \overline{S}[f;\tilde{\Delta}] = \overline{S}[f] \quad \text{for all } \Delta \in \mathcal{P}[I]$$

が成り立つ. 従って,

$$\underline{S}[f] = \sup_{\Delta \in \mathcal{P}[I]} \underline{S}[f;\Delta] \leq \overline{S}[f]$$

が得られる. □

いま, 次を示しておく.

命題 3.4.　$f : \bar{I} \to \mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で有界とする. このとき, $\underline{S}[f] = \overline{S}[f]$ であるための必要十分条件は,

$$(*)_1 \begin{cases} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し, } \Delta_\varepsilon \in \mathcal{P}[I] \text{ が存在して} \\ \qquad 0 \leq \overline{S}[f;\Delta_\varepsilon] - \underline{S}[f;\Delta_\varepsilon] \leq \varepsilon \end{cases}$$

となることである.

証明. ($\Rightarrow$)　定義 3.4 により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\tilde{\Delta}_{\varepsilon/2}, \hat{\Delta}_{\varepsilon/2} \in \mathcal{P}[I]$ が存在して

$$\overline{S}[f;\tilde{\Delta}_{\varepsilon/2}] \leq \overline{S}[f] + \frac{\varepsilon}{2},\ \underline{S}[f;\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}] \geq \underline{S}[f] - \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ. このとき, $\Delta_\varepsilon = \tilde{\Delta}_{\varepsilon/2} \wedge \hat{\Delta}_{\varepsilon/2} \in \mathcal{P}[I]$ とおくと, Δ_ε は $\tilde{\Delta}_{\varepsilon/2}, \hat{\Delta}_{\varepsilon/2}$ の細分であるから, 命題 3.1 (i) によって

$$\underline{S}[f;\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}] \leq \underline{S}[f;\Delta_\varepsilon] \leq \overline{S}[f;\Delta_\varepsilon] \leq \overline{S}[f;\tilde{\Delta}_{\varepsilon/2}]$$

が得られる. ここで, $\underline{S}[f] = \overline{S}[f]$ であるから,

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \overline{S}[f;\Delta_\varepsilon] - \underline{S}[f;\Delta_\varepsilon] \\
&\leq \overline{S}[f;\tilde{\Delta}_{\varepsilon/2}] - \underline{S}[f;\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}] \\
&\leq \left(\overline{S}[f] + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\underline{S}[f] - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

($\Leftarrow$)　任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$0 \leq \overline{S}[f;\Delta_\varepsilon] - \underline{S}[f;\Delta_\varepsilon] \leq \varepsilon$$

をみたす $\Delta_\varepsilon \in \mathcal{P}[I]$ をとると, 命題 3.3 によって

$$\underline{S}[f;\Delta_\varepsilon] \leq \underline{S}[f] \leq \overline{S}[f] \leq \overline{S}[f;\Delta_\varepsilon]$$

であるから,

$$0 \leq \overline{S}[f] - \underline{S}[f] \leq \overline{S}[f;\Delta_\varepsilon] - \underline{S}[f;\Delta_\varepsilon] \leq \varepsilon$$

が得られる. ここで, $\varepsilon > 0$ は任意であるから,

$$0 \leq \overline{S}[f] - \underline{S}[f] \leq 0,\ \underline{S}[f] = \overline{S}[f]$$

が成り立つ. □

4. Darboux の定理

関数の積分可能性を調べる上で, 次の Darboux の定理は重要である.

定理 4.1. (Darboux) $f:\bar{I}\to\mathbf{R}$ が $\bar{I}$ 上で有界ならば, 次が成り立つ.

(i) $$\overline{S}[f;\Delta]\to\overline{S}[f]\quad\text{as }|\Delta|\to 0,$$

i.e. 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $\hat{\delta}_\varepsilon>0$ が存在して

$$\Delta\in\mathcal{P}[I],\ |\Delta|\le\hat{\delta}_\varepsilon\ \Rightarrow\ 0\le\overline{S}[f;\Delta]-\overline{S}[f]\le\varepsilon.$$

(ii) $$\underline{S}[f;\Delta]\to\underline{S}[f]\quad\text{as }|\Delta|\to 0,$$

i.e. 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $\hat{\delta}_\varepsilon>0$ が存在して

$$\Delta\in\mathcal{P}[I],\ |\Delta|\le\hat{\delta}_\varepsilon\ \Rightarrow\ 0\le\underline{S}[f]-\underline{S}[f;\Delta]\le\varepsilon.$$

証明. まず, f は $\bar{I}$ 上で有界であるから,

$$|f(x)|\le\mu[f]\quad\text{for all }x\in\bar{I}$$

をみたす $\mu[f]>0$ が存在する. このとき,

$$|\sup f(A)|\le\mu[f],\ |\inf f(A)|\le\mu[f]\quad\text{for all }A\subset\bar{I}$$

が成り立つ.

(i)(a) $\varepsilon>0$ を任意にとると, 定義 3.4 より, $\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}\in\mathcal{P}[I]$ が存在して

$$\overline{S}[f]\le\overline{S}[f;\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]\le\overline{S}[f]+\frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ. このとき,

$$\tilde{\delta}_\varepsilon=\min_{m\in\mathbf{N}_{1,\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]}}\ell[I^{(m)}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]]>0,$$

$$\hat{\delta}_\varepsilon=\min\Big\{\frac{\tilde{\delta}_\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{4\mu[f]\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]}\Big\}>0$$

とおく.

(b) いま, $\Delta\in\mathcal{P}[I]$, $|\Delta|\le\hat{\delta}_\varepsilon$ とすると, 各 $m\in\mathbf{N}_{1,\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]}$ に対し,

$$\begin{aligned}a^{(m)}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]&\in\tilde{I}^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta])}[\Delta]\\&=(a^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta]-1)}[\Delta],a^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta])}[\Delta]]\end{aligned}$$

をみたす $k_\varepsilon^{(m)}[\Delta]\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}$ が (一意的に) 存在する. このとき, $k_\varepsilon^{(0)}[\Delta]=0$ とおくと,

$$a^{(\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}])}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]=\bar{b}=a^{(\nu[\Delta])}[\Delta]$$

より,

$$\begin{aligned}0=k_\varepsilon^{(0)}[\Delta]&\le k_\varepsilon^{(1)}[\Delta]\le k_\varepsilon^{(2)}[\Delta]\le\cdots\\&\le k_\varepsilon^{(\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]-1)}[\Delta]\le k_\varepsilon^{(\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}])}[\Delta]=\nu[\Delta]\end{aligned}$$

となるが,

$$k_\varepsilon^{(m-1)}[\Delta]<k_\varepsilon^{(m)}[\Delta]\quad\text{for }m\in\mathbf{N}_{1,\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]}$$

が成り立つ. 実際, もし $k_\varepsilon^{(m_0-1)}[\Delta]=k_\varepsilon^{(m_0)}[\Delta]$ をみたす $m_0\in\mathbf{N}_{1,\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]}$ が存在するならば,

$$\begin{aligned}&a^{(m_0-1)}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}],a^{(m_0)}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]\\&\quad\in\tilde{I}^{(k_\varepsilon^{(m_0-1)}[\Delta])}[\Delta]=\tilde{I}^{(k_\varepsilon^{(m_0)}[\Delta])}[\Delta]\subset\bar{I}^{(k_\varepsilon^{(m_0)}[\Delta])}[\Delta]\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}2\hat{\delta}_\varepsilon\le\tilde{\delta}_\varepsilon&\le\ell[I^{(m_0)}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]]\\&=a^{(m_0)}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]-a^{(m_0-1)}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]\\&\le\ell[I^{(k_\varepsilon^{(m_0)}[\Delta])}[\Delta]]\le|\Delta|\le\hat{\delta}_\varepsilon\end{aligned}$$

となり, 矛盾である. 従って,

$$\begin{aligned}0=k_\varepsilon^{(0)}[\Delta]&<k_\varepsilon^{(1)}[\Delta]<k_\varepsilon^{(2)}[\Delta]<\cdots\\&<k_\varepsilon^{(\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]-1)}[\Delta]<k_\varepsilon^{(\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}])}[\Delta]=\nu[\Delta]\end{aligned}$$

が成り立つ.

(c) (b) において

$$\begin{aligned}M_\varepsilon[\Delta]=\big\{m\in\mathbf{N}_{1,\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]-1}\ |\\ a^{(m)}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]\in\bar{I}^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta])}[\Delta]\big\}\\(\subset\mathbf{N}_{1,\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]-1})\end{aligned}$$

とおくと, $m\in M_\varepsilon[\Delta]$ に対し, 小区間 $I^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta])}[\Delta]$ に属する $\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}$ の分点は $a^{(m)}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]$ のみである. そこで, $I^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta])}[\Delta]=(a^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta]-1)}[\Delta],a^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta])}[\Delta])$ を 2 つの小区間

$$\begin{aligned}I_{\varepsilon,-}^{(m)}[\Delta]&=I^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta])}[\Delta]\cap I^{(m)}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]\\&=(a^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta]-1)}[\Delta],a^{(m)}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]),\\I_{\varepsilon,+}^{(m)}[\Delta]&=I^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta])}[\Delta]\cap I^{(m+1)}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]\\&=(a^{(m)}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}],a^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta])}[\Delta])\end{aligned}$$

に分けると, これらは $\Delta\wedge\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}$ の小区間であり,

$$\begin{aligned}&\ell[I^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta])}[\Delta]]\\&=a^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta])}[\Delta]-a^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta]-1)}[\Delta]\\&=(a^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta])}[\Delta]-a^{(m)}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}])\\&\qquad+(a^{(m)}[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]-a^{(k_\varepsilon^{(m)}[\Delta]-1)}[\Delta])\\&=\ell[I_{\varepsilon,-}^{(m)}[\Delta]]+\ell[I_{\varepsilon,+}^{(m)}[\Delta]]\quad\text{for }m\in M_\varepsilon[\Delta]\end{aligned}$$

が成り立つ. 更に,

$$K_\varepsilon[\Delta]=\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}\backslash\{k_\varepsilon^{(m)}[\Delta]\}_{m\in M_\varepsilon[\Delta]}\,(\subset\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]})$$

とおくと, $k\in K_\varepsilon[\Delta]$ に対し, 小区間 $I^{(k)}[\Delta]$ に属する $\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}$ の分点は存在しない.

いま, $\Delta\wedge\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}\in\mathcal{P}[I]$ は Δ の分点に $\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}$ の分点を付け加えて得られる I の分割であるから, $\Delta\wedge\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}$ は小区間

$$I_{\varepsilon,-}^{(m)}[\Delta],\ I_{\varepsilon,+}^{(m)}[\Delta]\ \ (m\in M_\varepsilon[\Delta]),$$

$$I^{(k)}[\Delta] \qquad\qquad (k \in K_\varepsilon[\Delta])$$

の集まりとして表され,

$$\begin{aligned}&\bar{S}[f;\Delta\wedge\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]\\ &= \sum_{m\in M_\varepsilon[\Delta]}\big\{(\sup f(\bar{I}^{(m)}_{\varepsilon,-}[\Delta]))\,\ell[I^{(m)}_{\varepsilon,-}[\Delta]]\\ &\qquad + (\sup f(\bar{I}^{(m)}_{\varepsilon,+}[\Delta]))\,\ell[I^{(m)}_{\varepsilon,+}[\Delta]]\big\}\\ &\quad + \sum_{k\in K_\varepsilon[\Delta]}(\sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta]))\,\ell[I^{(k)}[\Delta]]\end{aligned}$$

と表すことができる.

(d) (c) において,

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}\setminus K_\varepsilon[\Delta]}(\sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta]))\,\ell[I^{(k)}[\Delta]]\\ &= \sum_{m\in M_\varepsilon[\Delta]}(\sup f(\bar{I}^{(k^{(m)}_\varepsilon[\Delta])}[\Delta]))\,\ell[I^{(k^{(m)}_\varepsilon[\Delta])}[\Delta]]\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}&\bar{S}[f;\Delta]\\ &= \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}}(\sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta]))\,\ell[I^{(k)}[\Delta]]\\ &= \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta]}\setminus K_\varepsilon[\Delta]}(\sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta]))\,\ell[I^{(k)}[\Delta]]\\ &\quad + \sum_{k\in K_\varepsilon[\Delta]}(\sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta]))\,\ell[I^{(k)}[\Delta]]\\ &= \sum_{m\in M_\varepsilon[\Delta]}(\sup f(\bar{I}^{(k^{(m)}_\varepsilon[\Delta])}[\Delta]))\,\ell[I^{(k^{(m)}_\varepsilon[\Delta])}[\Delta]]\\ &\quad + \sum_{k\in K_\varepsilon[\Delta]}(\sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta]))\,\ell[I^{(k)}[\Delta]]\end{aligned}$$

が成り立つ. また, $\Delta\wedge\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}$ は Δ の細分であるから, 命題 3.1 によって

$$\begin{aligned}&0 \le \bar{S}[f;\Delta] - \bar{S}[f;\Delta\wedge\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]\\ &= \sum_{m\in M_\varepsilon[\Delta]}(\sup f(\bar{I}^{(k^{(m)}_\varepsilon[\Delta])}[\Delta]))\,\ell[I^{(k^{(m)}_\varepsilon[\Delta])}[\Delta]]\\ &\quad - \sum_{m\in M_\varepsilon[\Delta]}\big\{(\sup f(\bar{I}^{(m)}_{\varepsilon,-}[\Delta]))\,\ell[I^{(m)}_{\varepsilon,-}[\Delta]]\\ &\qquad + (\sup f(\bar{I}^{(m)}_{\varepsilon,+}[\Delta]))\,\ell[I^{(m)}_{\varepsilon,+}[\Delta]]\big\}\\ &\le \sum_{m\in M_\varepsilon[\Delta]}\big\{|\sup f(\bar{I}^{(k^{(m)}_\varepsilon[\Delta])}[\Delta])|\,\ell[I^{(k^{(m)}_\varepsilon[\Delta])}[\Delta]]\\ &\qquad + |\sup f(\bar{I}^{(m)}_{\varepsilon,-}[\Delta])|\,\ell[I^{(m)}_{\varepsilon,-}[\Delta]]\\ &\qquad + |\sup f(\bar{I}^{(m)}_{\varepsilon,+}[\Delta])|\,\ell[I^{(m)}_{\varepsilon,+}[\Delta]]\big\}\\ &\le \sum_{m\in M_\varepsilon[\Delta]}\big\{\mu[f]\,\ell[I^{(k^{(m)}_\varepsilon[\Delta])}[\Delta]]\\ &\qquad + \mu[f]\,\ell[I^{(m)}_{\varepsilon,-}[\Delta]] + \mu[f]\,\ell[I^{(m)}_{\varepsilon,+}[\Delta]]\big\}\\ &= 2\mu[f]\sum_{m\in M_\varepsilon[\Delta]}\ell[I^{(k^{(m)}_\varepsilon[\Delta])}[\Delta]]\\ &\le 2\mu[f]\sum_{m\in\mathbf{N}_{1,\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]-1}}|\Delta| = 2\mu[f](\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]-1)|\Delta|\\ &\le 2\mu[f]\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]\hat{\delta}_\varepsilon \le 2\mu[f]\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]\frac{\varepsilon}{4\mu[f]\nu[\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}]}\\ &= \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ. また, $\Delta\wedge\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}$ は $\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}$ の細分であるから, 命題 3.1 及び (a) を用いると,

$$\begin{aligned}&0 \le \bar{S}[f;\Delta] - \bar{S}[f] \le \bar{S}[f;\Delta\wedge\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}] + \frac{\varepsilon}{2} - \bar{S}[f]\\ &\quad \le \bar{S}[f;\hat{\Delta}_{\varepsilon/2}] - \bar{S}[f] + \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

が得られ, 主張が成り立つ.

(ii) (i) により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\hat{\delta}_\varepsilon > 0$ が存在して

$$\begin{aligned}&\Delta\in\mathcal{P}[I],\ |\Delta| \le \hat{\delta}_\varepsilon\\ &\quad\Rightarrow\ 0 \le \bar{S}[-f;\Delta] - \bar{S}[-f] \le \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ. このとき, 注意 3.2 (iii), 注意 3.4 によって主張が得られる. □

次に, 定理 4.1 (Darboux) を用いて, 関数の積分可能性の必要十分条件を与える.

定理 4.2. $f : \bar{I} \to \mathbf{R}$ が $\bar{I}$ 上で有界であるとき, f が $\bar{I}$ 上で積分可能であるための必要十分条件は, $\underline{S}[f] = \bar{S}[f]$ となることである. このとき,

$$\underline{S}[f] = \bar{S}[f] = \int_{\bar{I}} f(t)dt$$

が成り立つ.

証明. $(\Rightarrow)$ $S[f] = \int_{\bar{I}} f(t)dt$ とおくと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta_{\varepsilon/4} > 0$ が存在して

$$\begin{aligned}&\Delta\in\mathcal{P}[I],\ |\Delta| \le \delta_{\varepsilon/4},\ \xi\in Z[\Delta]\\ &\quad\Rightarrow\ |S[f;\Delta,\xi] - S[f]| \le \frac{\varepsilon}{4}\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $|\Delta_\varepsilon| \le \delta_{\varepsilon/4}$ をみたす $\Delta_\varepsilon\in\mathcal{P}[I]$ をとると, 各 $k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}$ に対し,

$$\begin{aligned}f(\bar{\xi}^{(k)}_\varepsilon) &\ge \sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon]) - \frac{\varepsilon}{4\ell[I]},\\ f(\underline{\xi}^{(k)}_\varepsilon) &\le \inf f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon]) + \frac{\varepsilon}{4\ell[I]}\end{aligned}$$

をみたす $\bar{\xi}^{(k)}_\varepsilon, \underline{\xi}^{(k)}_\varepsilon \in \bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon]$ が存在する. このとき,

$$\bar{\xi}_\varepsilon = (\bar{\xi}^{(k)}_\varepsilon)_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}},\ \underline{\xi}_\varepsilon = (\underline{\xi}^{(k)}_\varepsilon)_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}} \in Z[\Delta_\varepsilon]$$

とおくと, 注意 2.2 を用いることにより,

$$\begin{aligned}S[f;\Delta_\varepsilon,\bar{\xi}_\varepsilon] &= \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}} f(\bar{\xi}^{(k)}_\varepsilon)\,\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]]\\ &\ge \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}}\Big(\sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon]) - \frac{\varepsilon}{4\ell[I]}\Big)\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]]\\ &= \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}}(\sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon]))\,\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]]\\ &\qquad - \frac{\varepsilon}{4\ell[I]}\sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}}\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]]\\ &= \bar{S}[f;\Delta_\varepsilon] - \frac{\varepsilon}{4\ell[I]}\ell[I] = \bar{S}[f;\Delta_\varepsilon] - \frac{\varepsilon}{4}\end{aligned}$$

及び

$$
\begin{aligned}
&S[f;\Delta_\varepsilon,\underline{\xi}_\varepsilon] = \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}} f(\underline{\xi}_\varepsilon^{(k)})\,\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]] \\
&\le \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}} \Big(\inf f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon]) + \frac{\varepsilon}{4\ell[I]}\Big)\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]] \\
&= \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}} (\inf f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon]))\,\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]] \\
&\qquad + \frac{\varepsilon}{4\ell[I]}\sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}} \ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]] \\
&= \underline{S}[f;\Delta_\varepsilon] + \frac{\varepsilon}{4\ell[I]}\ell[I] = \underline{S}[f;\Delta_\varepsilon] + \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}
$$

が得られ,

$$
\begin{aligned}
0 &\le \bar{S}[f;\Delta_\varepsilon] - \underline{S}[f;\Delta_\varepsilon] \\
&\le \Big(S[f;\Delta_\varepsilon,\bar{\xi}_\varepsilon] + \frac{\varepsilon}{4}\Big) - \Big(S[f;\Delta_\varepsilon,\underline{\xi}_\varepsilon] - \frac{\varepsilon}{4}\Big) \\
&= (S[f;\Delta_\varepsilon,\bar{\xi}_\varepsilon] - S[f]) \\
&\quad - (S[f;\Delta_\varepsilon,\underline{\xi}_\varepsilon] - S[f]) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le |S[f;\Delta_\varepsilon,\bar{\xi}_\varepsilon] - S[f]| \\
&\quad + |S[f;\Delta_\varepsilon,\underline{\xi}_\varepsilon] - S[f]| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 従って, 命題 3.4 によって $\underline{S}[f] = \bar{S}[f]$ である.

($\Leftarrow$) $S[f] = \underline{S}[f] = \bar{S}[f]$ とおく. 定理 4.1 (Darboux) により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\hat{\delta}_\varepsilon > 0$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&\Delta \in \mathcal{P}[I],\ |\Delta| \le \hat{\delta}_\varepsilon \\
&\quad\Rightarrow\ \begin{cases} 0 \le \bar{S}[f;\Delta] - S[f] \le \varepsilon, \\ 0 \le S[f] - \underline{S}[f;\Delta] \le \varepsilon \end{cases}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. このとき, $\Delta \in \mathcal{P}[I]$, $|\Delta| \le \hat{\delta}_\varepsilon$, $\xi \in Z[\Delta]$ とすると, 注意 3.2 (ii) によって

$$\underline{S}[f;\Delta] \le S[f;\Delta,\xi] \le \bar{S}[f;\Delta]$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
&|S[f;\Delta,\xi] - S[f]| \\
&= \max\{S[f;\Delta,\xi] - S[f], S[f] - S[f;\Delta,\xi]\} \\
&\le \max\{\bar{S}[f;\Delta] - S[f], S[f] - \underline{S}[f;\Delta]\} \le \varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 従って, f は $\bar{I}$ 上で積分可能であり,

$$\int_{\bar{I}} f(t)dt = S[f]$$

が成り立つ. □

特に, 命題 3.4 と合わせると, 次が得られる.

系 4.1. $f : \bar{I} \to \mathbf{R}$ が $\bar{I}$ 上で有界であるとき, f が $\bar{I}$ 上で積分可能であるための必要十分条件は, $(*)_1$ が成り立つことである. □

5. 関数の積分可能性

次に, 系 4.1 を用いて, もう少し具体的な関数の積分可能性の十分条件について述べる. まず, 連続関数の積分可能性について述べる. ここで, 有界閉区間 $\bar{I}$ 上で定義された連続関数は, $\bar{I}$ 上で有界かつ一様連続であり, $\bar{I}$ 上での最大値, 最小値が存在することに注意しておく.

定理 5.1. $f : \bar{I} \to \mathbf{R}$ が $\bar{I}$ 上で連続ならば, f は $\bar{I}$ 上で積分可能である.

証明. f は $\bar{I}$ 上で連続であるから, $\bar{I}$ 上で有界かつ一様連続である. 特に, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta_{\varepsilon/\ell[I]} > 0$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&x_0, x_1 \in \bar{I},\ |x_0 - x_1| \le \delta_{\varepsilon/\ell[I]} \\
&\quad\Rightarrow\ |f(x_0) - f(x_1)| \le \frac{\varepsilon}{\ell[I]}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. ここで, $|\Delta_\varepsilon| \le \delta_{\varepsilon/\ell[I]}$ をみたす $\Delta_\varepsilon \in \mathcal{P}[I]$ をとると, 各 $k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}$ に対し, f は $\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon] = [a^{(k-1)}[\Delta_\varepsilon], a^{(k)}[\Delta_\varepsilon]]$ 上で連続であるから,

$$
\begin{aligned}
f(\bar{\xi}_\varepsilon^{(k)}) &= \max f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon]), \\
f(\underline{\xi}_\varepsilon^{(k)}) &= \min f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon])
\end{aligned}
$$

をみたす $\bar{\xi}_\varepsilon^{(k)}, \underline{\xi}_\varepsilon^{(k)} \in \bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon]$ が存在する. このとき,

$$
\begin{aligned}
&|\bar{\xi}_\varepsilon^{(k)} - \underline{\xi}_\varepsilon^{(k)}| \le a^{(k)}[\Delta_\varepsilon] - a^{(k-1)}[\Delta_\varepsilon] \\
&\qquad = \ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]] \le |\Delta_\varepsilon| \le \delta_{\varepsilon/\ell[I]}, \\
&0 \le f(\bar{\xi}_\varepsilon^{(k)}) - f(\underline{\xi}_\varepsilon^{(k)}) = |f(\bar{\xi}_\varepsilon^{(k)}) - f(\underline{\xi}_\varepsilon^{(k)})| \\
&\quad \le \frac{\varepsilon}{\ell[I]} \quad \text{for all } k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}
\end{aligned}
$$

であるから, 注意 2.2, 注意 3.1 (ii) を用いると,

$$
\begin{aligned}
0 &\le \bar{S}[f;\Delta_\varepsilon] - \underline{S}[f;\Delta_\varepsilon] \\
&= \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}} (\sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon]))\,\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]] \\
&\quad - \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}} (\inf f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon]))\,\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]] \\
&= \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}} \big\{\max f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon]) \\
&\qquad - \min f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon])\big\}\,\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]] \\
&= \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}} (f(\bar{\xi}_\varepsilon^{(k)}) - f(\underline{\xi}_\varepsilon^{(k)}))\,\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]] \\
&\le \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}} \frac{\varepsilon}{\ell[I]}\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]] = \frac{\varepsilon}{\ell[I]}\ell[I] = \varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ. よって, $(*)_1$ がみたされ, 系 4.1 によって f は $\bar{I}$ 上で積分可能である. □

次に, 単調関数の積分可能性を示す.

定理 5.2. $f:\bar{I}\to\mathbf{R}$ が $\bar{I}$ 上で単調増加 (or 単調減少) ならば, f は $\bar{I}$ 上で積分可能である.

証明. (a) f が $\bar{I}$ 上で単調増加とすると,

$$f(\bar{a})\le f(x)\le f(\bar{b})\quad\text{for all } x\in\bar{I}$$

であるから, f は $\bar{I}$ 上で有界である. また, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $|\Delta_\varepsilon|\le\dfrac{\varepsilon}{1+f(\bar{b})-f(\bar{a})}$ をみたす $\Delta_\varepsilon\in\mathcal{P}[I]$ をとると,

$$\begin{gathered}f(a^{(k)}[\Delta_\varepsilon])=\max f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon]),\\ f(a^{(k-1)}[\Delta_\varepsilon])=\min f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon])\\ \text{for all } k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}\end{gathered}$$

であるから, 注意 3.1 (ii) を用いると,

$$\begin{aligned}0&\le\bar{S}[f;\Delta_\varepsilon]-\underline{S}[f;\Delta_\varepsilon]\\ &=\sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}}(\sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon]))\,\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]]\\ &\quad-\sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}}(\inf f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon]))\,\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]]\\ &=\sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}}\big\{\max f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon])\\ &\qquad-\min f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_\varepsilon])\big\}\,\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]]\\ &=\sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}}\big\{f(a^{(k)}[\Delta_\varepsilon])\\ &\qquad-f(a^{(k-1)}[\Delta_\varepsilon])\big\}\,\ell[I^{(k)}[\Delta_\varepsilon]]\\ &\le\sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_\varepsilon]}}(f(a^{(k)}[\Delta_\varepsilon])-f(a^{(k-1)}[\Delta_\varepsilon]))|\Delta_\varepsilon|\\ &=(f(a^{(\nu[\Delta_\varepsilon])}[\Delta_\varepsilon])-f(a^{(0)}[\Delta_\varepsilon]))|\Delta_\varepsilon|\\ &=(f(\bar{b})-f(\bar{a}))|\Delta_\varepsilon|\\ &\le(f(\bar{b})-f(\bar{a}))\frac{\varepsilon}{1+f(\bar{b})-f(\bar{a})}\le\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ. よって, $(*)_1$ がみたされ, 系 4.1 によって f は I 上で積分可能である.

(b) f が $\bar{I}$ 上で単調減少とすると, $-f:\bar{I}\to\mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で単調増加であるから, (a) によって $-f$ は $\bar{I}$ 上で積分可能である. 従って, 定理 3.1 (i) より $f=-(-f)$ も $\bar{I}$ 上で積分可能である. □

更に, 積分可能な関数と Lipschitz 連続な関数の合成関数が積分可能となることを示す. 念のため, 関数の Lipschitz 連続性の定義を述べておく. 以下, $\tilde{J}$ を区間, $J=(\bar{\alpha},\bar{\beta})$ を開区間とする.

定義 5.1. $\varphi:\tilde{J}\to\mathbf{R}$ が $\tilde{J}$ 上で Lipschitz 連続であるとは, 定数 $L>0$ が存在して

$$|\varphi(y_0)-\varphi(y_1)|\le L|y_0-y_1|\quad\text{for all } y_0,y_1\in\tilde{J}$$

をみたすことである. このとき, L を φ の Lipschitz 定数という. □

注意 5.1. (i) $\varphi:\tilde{J}\to\mathbf{R}$ が $\tilde{J}$ 上で Lipschitz 連続ならば, φ は $\tilde{J}$ 上で一様連続である.

(ii) $\varphi:J\to\mathbf{R}$ が J 上で C^1-級ならば, 任意の $\alpha<\beta\in J$ に対し, φ は (正確には, $\varphi|_{[\alpha,\beta]}:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ は) $[\alpha,\beta]$ 上で Lipschitz 連続である. □

例 5.1. 注意 1.1 (ii) より, $\iota_\pm,|\iota|:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は $\mathbf{R}$ 上で Lipschitz 連続である. □

積分可能な関数と Lipschitz 連続な関数の合成関数の積分可能性を示すために, 次の補題が鍵となる.

補題 5.1. $f:\bar{I}\to\mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で有界かつ $f(\bar{I})\subset\tilde{J}$ をみたすとし, $\varphi:\tilde{J}\to\mathbf{R}$ は $\tilde{J}$ 上で Lipschitz 連続, $L>0$ をその Lipschitz 定数とする. このとき,

$$\begin{aligned}0&\le\sup\varphi\circ f(\bar{I})-\inf\varphi\circ f(\bar{I})\\ &\le L(\sup f(\bar{I})-\inf f(\bar{I}))\end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. $|\varphi(y_1)-\varphi(y_0)|\le L|y_1-y_0|\quad\text{for } y_0,y_1\in\tilde{J}$

であることに注意する.

$$\inf f(\bar{I})\le f(x)\le\sup f(\bar{I})\quad\text{for } x\in\bar{I}$$

より,

$$\begin{gathered}f(x_1)-f(x_0)\le\sup f(\bar{I})-\inf f(\bar{I}),\\ f(x_0)-f(x_1)\le\sup f(\bar{I})-\inf f(\bar{I})\\ \text{for all } x_0,x_1\in\tilde{I}\end{gathered}$$

であるから,

$$\begin{aligned}&|f(x_1)-f(x_0)|\\ &=\max\{f(x_1)-f(x_0),f(x_0)-f(x_1)\}\\ &\le\sup f(\bar{I})-\inf f(\bar{I})\quad\text{for all } x_0,x_1\in\tilde{I}\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って,

$$\begin{aligned}\varphi\circ f(x_1)-\varphi\circ f(x_0)&\le|\varphi(f(x_1))-\varphi(f(x_0))|\\ &\le L|f(x_1)-f(x_0)|\\ &\le L(\sup f(\bar{I})-\inf f(\bar{I}))\\ &\qquad\text{for all } x_0,x_1\in\bar{I}\end{aligned}$$

となるから, $x_1\in\bar{I}$ に関する上限, $x_0\in\bar{I}$ に関する下限をとることにより, 主張が得られる. □

これを用いると, 次を証明することができる.

定理 5.3. $f:\bar{I}\to\mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で積分可能かつ $f(\bar{I})\subset\tilde{J}$ をみたすとし, $\varphi:\tilde{J}\to\mathbf{R}$ は $\tilde{J}$ 上で Lipschitz 連続とする. このとき, $\varphi\circ f:\bar{I}\to\mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で積分可能である.

証明. φ の Lipschitz 定数を L とする. $\varepsilon>0$ とすると, f は $\bar{I}$ 上で積分可能であるから, 定理 3.4 に

よって

$$0 \leq \bar{S}[f;\Delta_{\varepsilon/L}] - \underline{S}[f;\Delta_{\varepsilon/L}] \leq \frac{\varepsilon}{L}$$

をみたす $\Delta_{\varepsilon/L} \in \mathcal{P}[I]$ が存在する．このとき, 補題 5.1 によって

$$\begin{aligned}&\sup \varphi\circ f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_{\varepsilon/L}]) - \inf \varphi\circ f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_{\varepsilon/L}])\\ &\leq L\,(\sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_{\varepsilon/L}]) - \inf f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_{\varepsilon/L}]))\\ &\qquad \text{for } k \in \mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_{\varepsilon/L}]}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}0 &\leq \bar{S}[\varphi\circ f;\Delta_{\varepsilon/L}] - \underline{S}[\varphi\circ f;\Delta_{\varepsilon/L}]\\ &= \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_{\varepsilon/L}]}} \big\{\sup \varphi\circ f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_{\varepsilon/L}])\\ &\qquad - \inf \varphi\circ f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_{\varepsilon/L}])\big\}\,\ell[I^{(k)}[\Delta_{\varepsilon/L}]]\\ &\leq \sum_{k\in\mathbf{N}_{1,\nu[\Delta_{\varepsilon/L}]}} L\big\{\sup f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_{\varepsilon/L}])\\ &\qquad - \inf f(\bar{I}^{(k)}[\Delta_{\varepsilon/L}])\big\}\,\ell[I^{(k)}[\Delta_{\varepsilon/L}]]\\ &= L(\bar{S}[f;\Delta_{\varepsilon/L}] - \underline{S}[f;\Delta_{\varepsilon/L}]) \leq L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．従って, $\varphi\circ f$ について $(*)_1$ がみたされるから, 系 4.1 によって $\varphi\circ f$ は $\bar{I}$ 上で積分可能である． □

これより, 次が得られる．ここで, $f:\bar{I}\to\mathbf{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}&f_\pm(x) = f(x)_\pm = \iota_\pm\circ f(x),\\ &[|f|](x) = |f(x)| = [|\iota|]\circ f(x) \quad \text{for } x\in\bar{I}\end{aligned}$$

(複号同順) であることに注意する．

系 5.1. $f:\bar{I}\to\mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で積分可能とすると, 次が成り立つ．

(i) $f_\pm, |f|:\bar{I}\to\mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で積分可能である．

(ii) $\varphi: J\to\mathbf{R}$ は $J=(\bar{\alpha},\bar{\beta})$ 上で C^1-級かつ

$$f(\bar{I})\subset J,\ \bar{\alpha} < \inf f(\bar{I}) \leq \sup f(\bar{I}) < \bar{\beta}$$

ならば, $\varphi\circ f:\bar{I}\to\mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で積分可能である．

証明. (i) 例 5.1 によって $\iota_\pm, |\iota|:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は $\mathbf{R}$ 上で Lipschitz 連続であるから, 定理 5.3 によって

$$f_\pm = \iota_\pm\circ f,\ |f| = [|\iota|]\circ f:\bar{I}\to\mathbf{R}$$

は $\bar{I}$ 上で積分可能である．

(ii) 仮定より, $\inf f(\bar{I}), \sup f(\bar{I}) \in J$ であり, 注意 5.1 (ii) によって

$$\varphi|_{[\inf f(\bar{I}),\sup f(\bar{I})]} : [\inf f(\bar{I}),\sup f(\bar{I})]\to\mathbf{R}$$

は $[\inf f(\bar{I}),\sup f(\bar{I})]$ 上で Lipschitz 連続である．このとき, $f(\bar{I})\subset[\inf f(\bar{I}),\sup f(\bar{I})]$ より,

$$\varphi\circ f(x) = [\varphi|_{[\inf f(\bar{I}),\sup f(\bar{I})]}]\circ f(x) \quad \text{for } x\in\bar{I}$$

であるから, 定理 5.3 によって $\varphi\circ f$ は $\bar{I}$ 上で積分可能である． □

系 5.1 (i) に注意すると, 次が成り立つ．

命題 5.1. $f:\bar{I}\to\mathbf{R}$ が $\bar{I}$ 上で積分可能ならば,

$$\Big|\int_{\bar{I}} f(t)dt\Big| \leq \int_{\bar{I}} |f(t)|dt$$

が成り立つ．

証明. 系 5.1 (i) により, $|f|:\bar{I}\to\mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で積分可能であることに注意する．このとき,

$$f(x)\leq|f(x)|,\ \ -f(x)\leq|f(x)| \quad \text{for all } x\in\bar{I}$$

であるから, 定理 2.1 (ii) によって

$$\begin{aligned}\int_{\bar{I}} f(t)dt &\leq \int_{\bar{I}} |f(t)|dt,\\ -\int_{\bar{I}} f(t)dt &= \int_{\bar{I}} (-f(t))dt \leq \int_{\bar{I}} |f(t)|dt\end{aligned}$$

が得られ,

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\bar{I}} f(t)dt\Big| &= \max\Big\{\int_{\bar{I}} f(t)dt, -\int_{\bar{I}} f(t)dt\Big\}\\ &\leq \int_{\bar{I}} |f(t)|dt\end{aligned}$$

が成り立つ． □

系 5.1 (ii) によって次が得られる．

例 5.2. $f:\bar{I}\to\mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で積分可能とし, $m\in\mathbf{N}$ とする．

(i) $\quad f^m(x) = f(x)^m = \iota^m\circ f(x) \quad \text{for } x\in\bar{I}$

によって定義される $f^m:\bar{I}\to\mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で積分可能である．

(ii) $\inf f(\bar{I}) > 0$ であるとき,

$$\Big[\frac{1}{f^m}\Big](x) = \frac{1}{f(x)^m} = \iota^{-m}\circ f(x) \quad \text{for } x\in\bar{I}$$

によって定義される $\dfrac{1}{f^m}:\bar{I}\to\mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で積分可能である． □

これを用いると, 2 つの積分可能な関数の積も積分可能であることが証明できる．

命題 5.2. $f,g:\bar{I}\to\mathbf{R}$ が $\bar{I}$ 上で積分可能ならば,

$$[fg](x) = f(x)g(x) \quad \text{for } x\in\bar{I}$$

によって定義される $fg:\bar{I}\to\mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で積分可能である．

証明. 定理 2.1 (i) によって $f+g:\bar{I}\to\mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で積分可能であるから, 例 5.2 (i) によって $(f+g)^2$, $f^2, g^2:\bar{I}\to\mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で積分可能である．このとき,

$$
\begin{aligned}
[fg](x) &= f(x)g(x) \\
&= \frac{1}{2}((f(x)+g(x))^2 - f(x)^2 - g(x)^2) \\
&= \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2](x) \quad \text{for } x \in \bar{I}
\end{aligned}
$$

であるから, 定理 2.1 (i) によって $fg : \bar{I} \to \mathbf{R}$ は $\bar{I}$ 上で積分可能である. □

参考文献.

小池茂昭 (2010),
微分積分, テキスト 理系の数学 2, 数学書房.

黒田成俊 (2002),
微分積分, 共立講座 21 世紀の数学 1, 共立出版.

三村征雄 (1970),
微分積分学 I, 岩波全書, 岩波書店.

御園生善尚, 望月望, 金子誠, 内山明人 (1989),
改訂版 解析学大要, 養賢堂.

中村哲男, 今井秀雄, 清水悟 (2003),
基礎微分積分学 I, 1 変数の微積分, 共立出版.

赤摂也 (2014),
積分学, 微分積分学 II, 日本評論社.

鈴木武, 山田義雄, 柴田良弘, 田中和永 (2007),
理工系のための微分積分学 I, 内田老鶴圃.

高木貞治 (1983),
解析概論 改訂第三版, 岩波書店.

浦川肇 (2006),
微積分の基礎, 現代基礎数学 7, 朝倉書店.

雪江明彦 (2008),
概説 微分積分学, 培風館.

（平成29年 9 月29日受理）