

動的数学ソフト GeoGebra を利用した授業実践

－ 中学校第 3 学年図形分野における授業づくりを通して－

* 森 岡 正 臣 ・ ** 米 川 聡

Teaching cases making use of the dynamic mathematics software, GeoGebra
-Working out lesson plans concerning graphic field of the junior high school third grade mathematics-

MORIOKA Masaomi and YONEKAWA Satoshi

要 旨

動的数学ソフト GeoGebra は、授業で使用している教科書や黒板では表現することのできなかつた様々な図形の様子を表現することができる。中学校第 3 学年数学の図形分野では、GeoGebra を利用して図形等を提示すると、生徒にとってより理解が深まる内容が多々ある。本稿では、これらの授業実践について報告する。また、これらの授業実践後の生徒のアンケートをもとに、GeoGebra を利用した授業の有効性について議論する。

Key words : 動的数学ソフト GeoGebra、中学校第 3 学年数学図形分野、タブレット端末、電子黒板

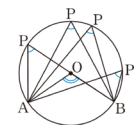
1. はじめに

円周角の定理を例に挙げると、これは一般的な教科書において図 1 のように表記してある。1 つの弧に対して無数にある円周角の大きさは一定であるということ、いくつかの円周角を描き込んだ図で表現している。さらに、そのいくつかの円周角は中心角の半分であるということを示すことで表現している。円周角の定理を教科書や黒板で表現するとすれば、これが限界である。このような場面が、教科書の中に多くある。

これまでに調べたことから、次の定理が成り立つ。

円周角の定理

定理 1 つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、その弧に対する中心角の半分である。



$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

図 1

十数年前までであれば前述したような表現が限界であったが、パソコンやタブレット、電子黒板が教育現場で普及してきた今日では、教科書や黒板で表現することができなかつたことが可能になった。動的数学ソフト GeoGebra は、幾何、代数、表計算、グラフ、統計、解析をひとつの使いやすいパッケージにした、フリーソフトウェアである。これは、図形の描画だけでなく、図形の動的変化なども容易に描画できるなど様々な機能がある。本研究では、描画した図形を移動や変形、拡大する機能を利用して授業を展開すれば、図形の定理や性質を正確に表現することができ、より生徒に分かりやすく伝えることができると考え、宮城教育大学附属中学校第 3 学年数学「図形」の分野において、動的数学ソフト GeoGebra を利用した授業の実践を行った。次に、動的数学ソフト GeoGebra を利用した授業を毎時間実践することにより、教科書と黒板を主に使用した通常の授業との違いを明らかにし、その効果を生徒のアンケート結果により検証する。

* 宮城教育大学数学教育講座

** 宮城教育大学附属中学校

2. 研究の方法

(1) 本研究の視点、対象等

動的数学ソフト GeoGebra を利用して教材を作り、宮城教育大学附属中学校第3学年147名、4学級を対象として、2016年11月から2017年1月の期間に授業実践を行った。実践前後に生徒の意識調査を行い、主に教科書や黒板を利用した授業との変容を探る。

(2) 研究の内容

中学校第3学年数学「図形」の分野において、動的数学ソフト GeoGebra を利用して授業を展開する。実践した内容は、次のとおりである。

① 三角形と比の定理

$\triangle ABC$ の辺 AB 、 AC 上の点をそれぞれ D 、 E として辺 BC と平行となる線分 DE を引く。 $\triangle ABC$ を変形させることで、どんな三角形においても定理が成り立つことを表現した。(図2、図3)

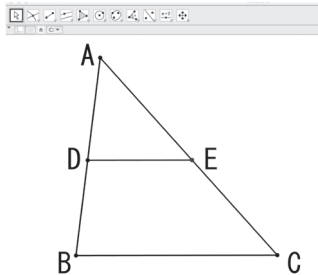


図2



図3

また、線分 DE を BC に対して平行のまま移動させることで、どのような場合でも定理が成り立つことを表現した。(図4)

さらに、 $\triangle ABC$ の線分 BA 、 CA を延長させて線分 DE を $\triangle ABC$ の内部から外部へ連続

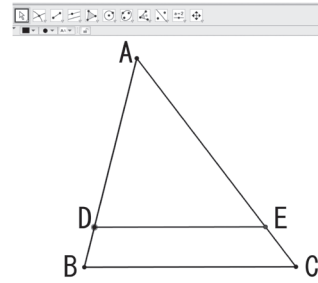


図4

的に移動させることで、2点 D 、 E が辺 BA 、 CA の延長線上にあっても、定理が成り立つことを表現した。(図5、図6)

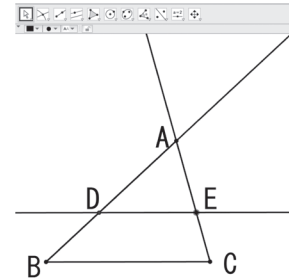


図5

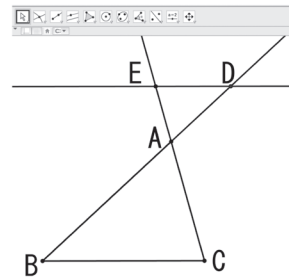


図6

② 三角形と比の定理の逆

$\triangle ABC$ の辺 AB 、 AC 上にそれぞれ点 D 、 E をとり、線分 DE を引く。点 D や点 E を移動させることを提示しながら、点 D 、 E がどんな

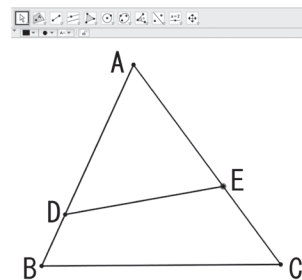


図7

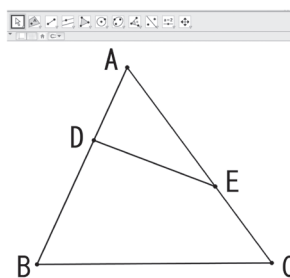


図 8

場合に $DE \parallel BC$ となるか予想させた。(図 7、図 8)

③ 中点連結定理

$\triangle ABC$ の辺 AB 、 AC の中点をそれぞれ M 、 N として線分 MN を引く。 $\triangle ABC$ を連続的に変形させることで、どんな三角形においても定理が成り立つことを表現した。(図 9、図 10)

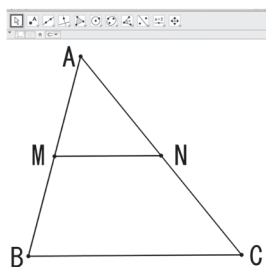


図 9

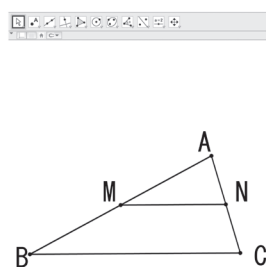


図 10

また、四角形 $ABCD$ の辺 AB 、 BC 、 CD 、 DA の中点をそれぞれ E 、 F 、 G 、 H として、四角形 $EFGH$ をかく。四角形 $ABCD$ を連続的に変形させることで、どんな四角形 $ABCD$ であっても、あるいは四角形 $ABCD$ が凹四角形であっても、四角形 $EFGH$ は必ず平行四辺形になることを表現した。(図 11、図 12、図 13)

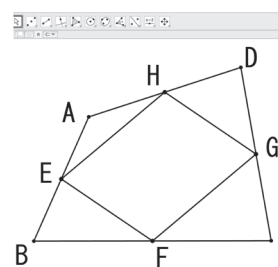


図 11

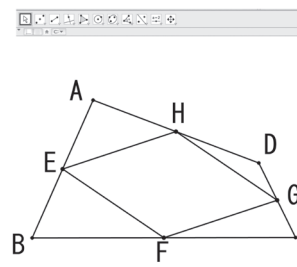


図 12

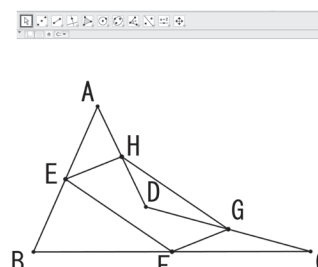


図 13

④ 平行線と比の定理

平行な 3 つの直線 a 、 b 、 c が直線 l とそれぞれ A 、 B 、 C で交わり、直線 l' とそれぞれ A' 、 B' 、 C' で交わらせる。直線 a 、 b 、 c を移動させたり、直線 l 、 l' を移動させたりすることで、どんな場合でも定理が成り立つことを表現した。(図 14、図 15、図 16)

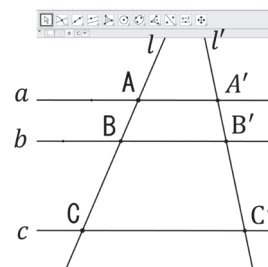


図 14

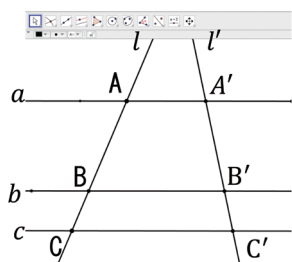


図15

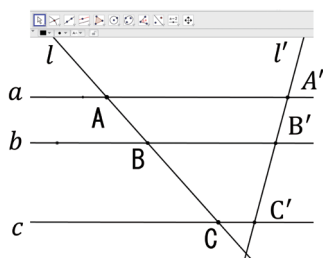


図16

⑤ 黄金比

縦と横の比が黄金比となっている長方形をかき、その長方形を正方形と黄金長方形に分ける。(図17) 正方形の中には、正方形の1辺を半径とする4分の1の円を順にかく。その作業をできるだけたくさん繰り返した図を作成する。その図を拡大して表示することで、相似の関係にある黄金長方形や渦巻状の曲線が無限に繰り返し現れることを表現し(図18、図19)、黄金長方形について生徒に興味を持たせることができた。

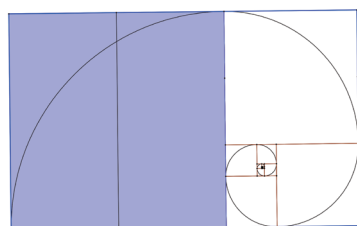


図17

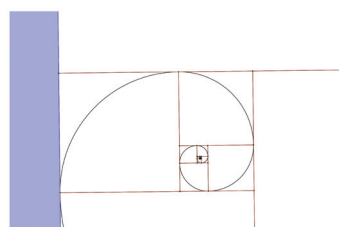


図18

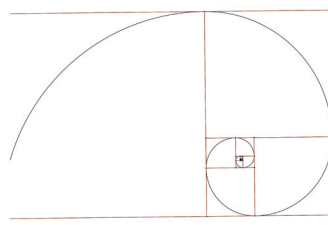


図19

⑥ 円周角の定理

生徒に GeoGebra を実際に操作させた。(図20)



図20

円Oをかき、円周上に3点P、A、Bをとらせて、線分PA、PB、OA、OBを引かせる。実際に点Pを移動させることで、1つの弧に対する円周角は無数にあるということ(図21、図22)や、中心角 $\angle AOB$ と円周角 $\angle APB$ の大きさを表示させて点Pを移動させて円周角の大きさは一定であるということを生徒に気付かせた。(図23)さらに、円周角を連続的に変形させたことで、円周角の定理の証明の場合分けを表現した。

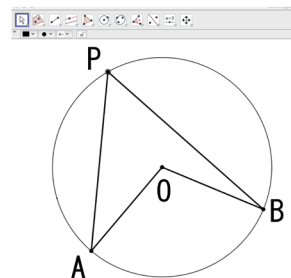


図21

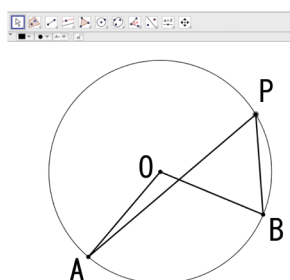


図22

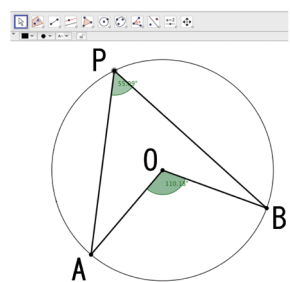


図23

⑦ 円周角と弧の定理

円Oをかき、円周上に3点A、B、C、D、P、Qをとる。線分PA、PB、QC、QDをひき、 $\angle APB$ と $\angle CQD$ を変形させることで、定理を表現した。(図24、図25) その活動を通して、1つの円では等しい弧に対する円周角が等しいことを直感的にとらえさせた。

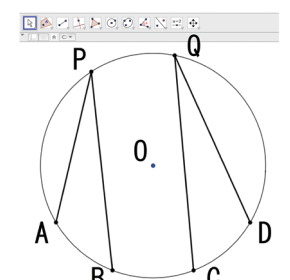


図24

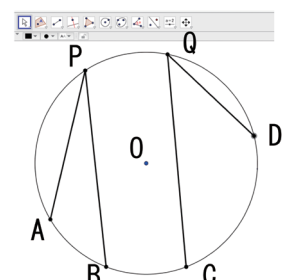


図25

⑧ 直径と円周角の定理

円Oをかき、円周上に3点A、B、Pをとる。線分OA、OB、AP、BPをひき、 $\angle AOB$ と $\angle APB$ の大きさを表示させる。(図26) 点Bを移動させて中心角 $\angle AOB$ を 180° に連続的に変化させることで(図27)、生徒がとらえにくい半円の弧を既習事項である円周角の定理と関連付けた。

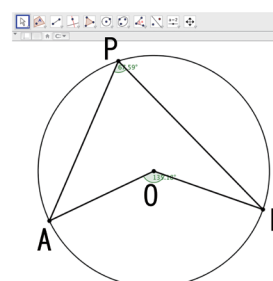


図26

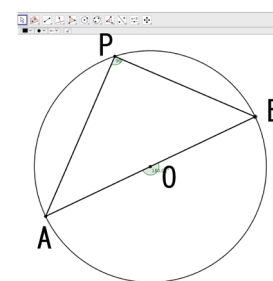


図27

⑨ 円周角の定理の逆

円Oをかき、円周上に3点P、A、Bをとる。線分PA、PB、直線ABをひき、円周の線の色を無色にする。 $\angle APB$ の大きさを表示させる。(図28) 点Pを、残像を表示させながら $\angle APB$ の大きさを変えずに移動させると、円になることを表現した。(図29)

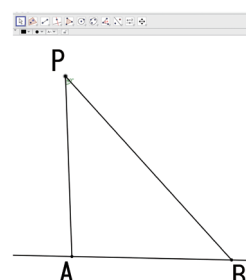


図28

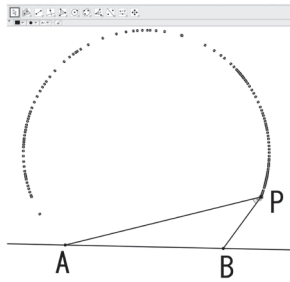


図29

さらに、円Oをかき、円周上に3点A、B、C、円の内部に点Pをとり、 $\angle ACB$ と $\angle APB$ をかく。(図30) 点Pを円の内部から円周上、円の外部へと連続的に移動させて、 $\angle ACB$ と $\angle APB$ の大きさを比べさせた。(図31) 最初は、 $\angle ACB$ より大きい $\angle APB$ が徐々に小さくなり、円の外部へ移動すると $\angle ACB$ より小さくなる様子を視覚的に表現した。

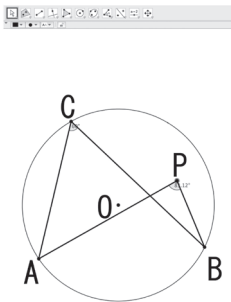


図30

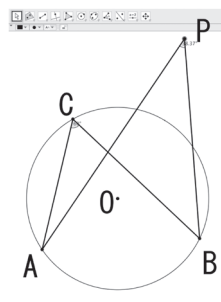


図31

⑩ 円外の1点からの接線の作図

円Oと円外の点Aをかく。点Aを通る直線をかき、(図32) その直線を移動させて円Oと接しているように表示する。(図33) その接点を拡大することで、実際は接していないこと

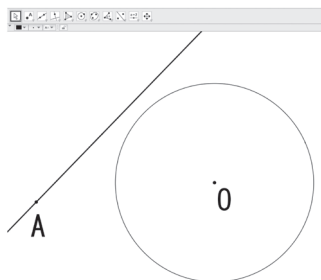


図32

を表現した。(図34) 生徒に、接線を作図する必要性を実感させることができた。

さらに、円Oをかいて円周上の点Pを通る接線をひく。(図35) 接点Pを拡大することで、実際の接点の様子を表現した。(図36、図37) 接点の様子をあらかじめ予想させることで、生徒は興味を持って観察することができた。

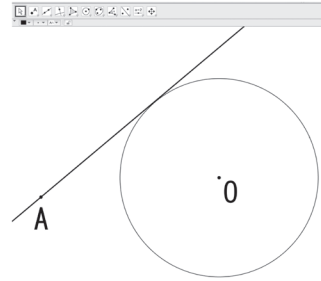


図33

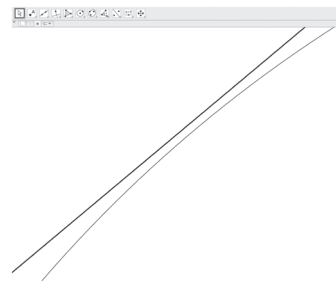


図34

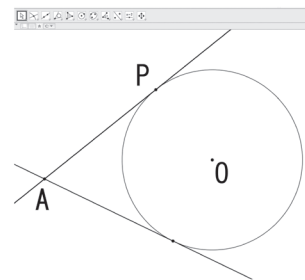


図35

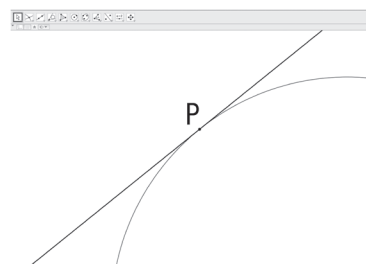


図36

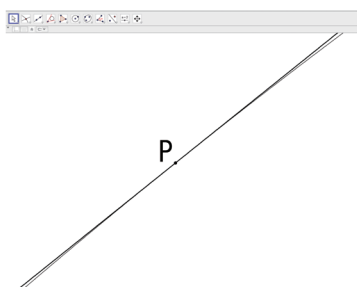


図37

⑪ 方べきの定理

円をかき、円の内部に点Pをとり、円周上に2点A、Cをとる。点P、Aと点P、Cを通る直線をひき、円Oとの交点をそれぞれ点B、Dとする。(図38) 点Pを円の内部から外部に移動させることで、異なる2つの方べきの定理の図を連続的に表現した。(図39)

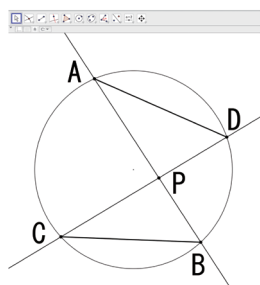


図38

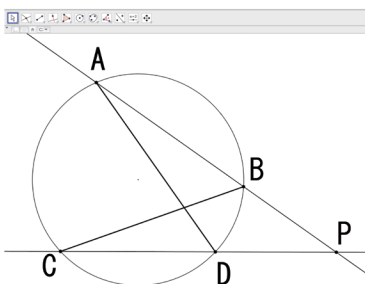


図39

⑫ 三平方の定理

直角三角形 ABC をかき、その外側に辺 BC、CA、AB を1辺とする正方形をかき、それぞれの面積を表示する。(図40) 直角三角形を変形させ、それとともなって正方形の大きさも変わることを提示することで、どんな直角三角形でも定理が成り立つことを表現した。(図41) また、三平方の定理の証明にもつなげるこ

とができた。

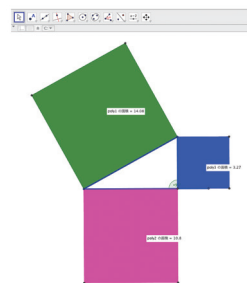


図40

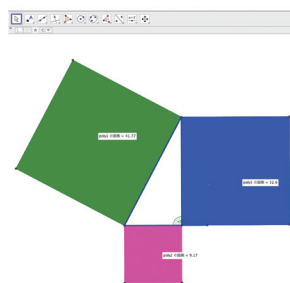


図41

⑬ 球の切り口の半径を求める

球と、その中心を頂点として底面が球面上になる円すいをかく。(図42) 図を回転させることで、球の内部にできる直角三角形を様々な角度から表示した。(図43)

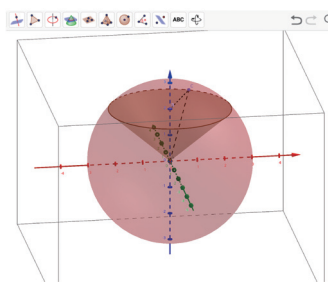


図42

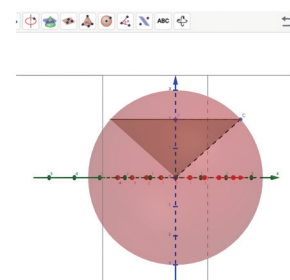


図43

⑭ 直方体の対角線の長さを求める

直方体をかき、底面の対角線と直方体の対角線をひく。(図44)図を回転させることで、底面と直方体の内部にできる直角三角形を様々な角度から表示した。(図45)

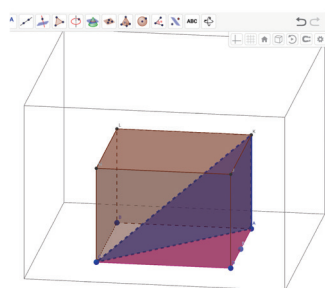


図44

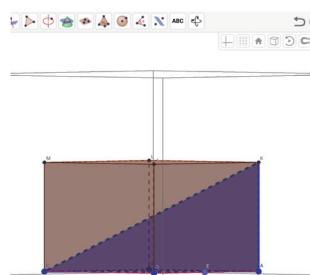


図45

⑮ 円錐の体積を求める

円錐をかき、頂点から底面に垂線をひく。(図46)図を回転させることで、円錐の内部にできる直角三角形を様々な角度から表示した。(図47)

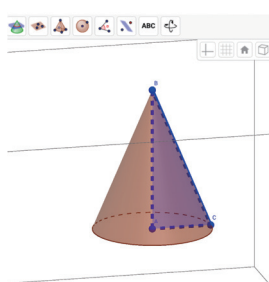


図46

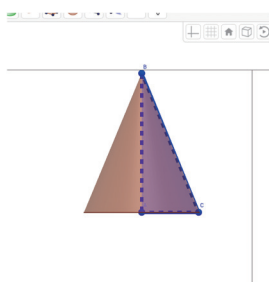


図47

3. 意識調査の方法、結果及び考察

生徒対象に記名式によるアンケート調査を行った。対象は第3学年147名とし、質問項目は2項目を設定した。各項目をA:よく当てはまる、B:どちらかというと当てはまる、C:どちらかというと当てはまらない、D:あまり当てはまらない、の4段階で回答させた。2016年9月に主に教科書や黒板を使用した通常の授業(1、2学年の図形の授業)について、2017年2月に動的数学ソフト GeoGebra を利用した授業について、それぞれ同じ質問項目で調査を行い、生徒の変容を探った。(145名回答)

「『図形』の授業は、分かりやすかった。」という問いに対して、A と答えた生徒は、34ポイント増加した。B と答えた生徒は20ポイント減少したが、A、B と答えた生徒は、合わせて96%であった。C、D と答えた生徒は、それぞれ12ポイント、2ポイント減少し、合わせて4%であった。(図48)

「『図形』の授業は、好きである。」という問いに対して、A と答えた生徒は、14ポイント増加した。B と答えた生徒は3ポイント減少したが、A、B と答えた生徒は、合わせて85%であった。C、D と答えた生徒は、それぞれ7ポイント、5ポイント減少し、合わせて15%であった。(図49)

アンケートの結果から、動的数学ソフト GeoGebra を利用したことは、生徒にとって分かりやすく感じられたと考えられる。要因として次の3つの GeoGebra の機能が考えられる。

第1に言葉や図だけでは十分に表現できなかった定理を、より正確に表現できたことである。例えば「全

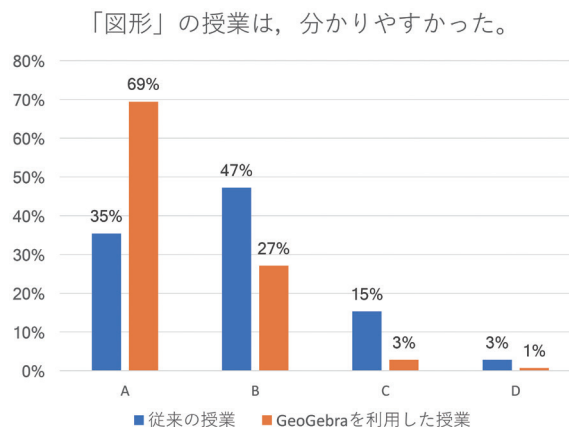


図48

「図形」の授業は、好きである。

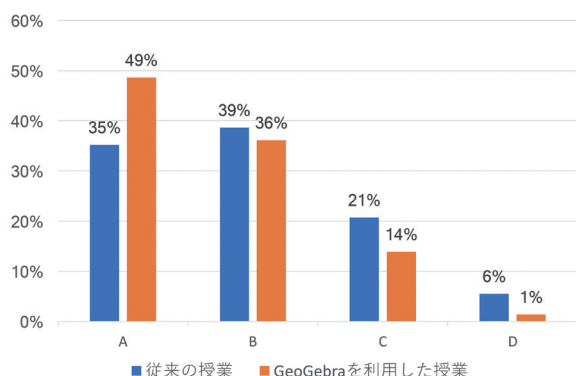


図49

での三角形において」とか「大きさが一定」といった教科書の不十分な部分を、今までであったら生徒自身がイメージしなければならなかった。しかし、動的数学ソフト GeoGebra を利用すれば、それらのことは適切に表現することができた。不十分な部分をイメージできない生徒に対してだけではなく、イメージできる生徒にとっても自分のイメージと同じであるということを確認することができる。定理を証明する場面においても、証明する前にイメージを表現できることは、証明する動機づけになったと考えられる。

第2に、教科書や黒板では拡大することができなかった図形を、限りなく拡大できたことである。例えば、相似の関係にある黄金長方形を無限にかいて表現することができたり、円の接線の接点部分を限りなく大きく表現することができたりした。提示する前に生徒にどんな図になるか予想させることで、より一層興味をもって学習に取り組むことができたと考えられる。

第3に、立体図形を様々な方向から提示できたことである。教科書や黒板では立体図形を平面上で一つの方向からしか提示することができなかった。しかし、様々な方向から提示できたことで、生徒一人一人がイメージするための支援や確認になった。

立体図形を実感させるためには、実物を生徒に提示したり、生徒が実際に手にとって観察したりすることが好ましい。しかし、多くの実物を用意することは非常に手間がかかる。動的数学ソフト GeoGebra を利用したことで、より手軽に立体図形を観察させることができた。

4. 成果と課題

(1) 成果

図形の授業において、動的数学ソフト GeoGebra を利用することで、様々な図形の様子をより分かりやすく表現することができた。そのことで、図形の授業に対して抱いていた抵抗感がなくなったり、より好きになったりした生徒が増加したと考えられる。定理や立体図形など、教科書や黒板の言葉や図だけではイメージすることが難しい生徒に対しては非常に有効な手立てであったと考えられる。

また、動的数学ソフト GeoGebra を利用して、今までできなかった授業を展開することができている。円周角の定理の授業では、実際に生徒に GeoGebra を見せるだけでなく操作させたことで、1つの弧に対する円周角は無数にあり、大きさは一定であることを実感させることができた。円の接線の授業では、接点部分を拡大して提示したことで、接線の作図方法の必要性を持たせることができたり、実際の接点を見せることができたりした。動的数学ソフト GeoGebra を利用することで、他にも教科書や黒板では難しかった授業を展開できる可能性がある。

描いた図形が動くということは、生徒にとって非常に刺激的である。ICT 機器が発達していなかった十数年前には、与えることが難しかった刺激である。「どのように動くのだろうか。」「どのような形になるのだろうか。」などと、生徒が自然に疑問に思うことができた。図形が動くという刺激によって、図形分野に興味を持つようになった生徒がいたこともアンケートの結果から分かる。

近い将来、数学の教科書が入っているタブレット端末を生徒一人一人が所有するようになると仮定する。授業や自宅学習の中で、生徒自身が教科書の図形を自由に動かしたり、拡大したりすることができるようになれば、生徒たちはさらに興味を持って取り組むことが期待できるだろう。

(2) 課題

動的数学ソフト GeoGebra を利用して授業を展開するためには、電子黒板やパソコン、タブレット端末などの ICT 機器が必要である。以前ほどではないが、まだ公立中学校には十分な設備があるとはいえない。より多くの学校で、より多くの ICT 機器の設備が増えることを期待する。

今回の実践では、ほとんどの場面で著者がタブレット端末上で動的数学ソフト GeoGebra を操作して、その画面を電子黒板を通して生徒に提示して、授業を展開した。理由としては、授業時間内に生徒一人一人にタブレット端末上で動的数学ソフト GeoGebra を操作させると、操作したり指導したりする時間と手間がかかってしまうからである。

動的数学ソフト GeoGebra は、作成した教材をネット上に公開したものを各家庭で生徒に操作させることも可能である。今後は、生徒に自宅のパソコン等で事前に操作させてから、授業に臨ませることも検討したい。

最後に、動的数学ソフト GeoGebra を実際に生徒に操作させたり、図形を変化させる様子を生徒に提示したりすることは、教科書や黒板を使用した通常の授業とは違った授業の展開になることは明らかである。図形のどの部分をどのように動かすのか、動く様子をどの程度提示するのか、生徒にどのような発問をして、何を考えさせるのかなど、今後も実践しながら研究を進めていきたいと考えている。

5. 参考文献

- (1) 「新しい数学 3年」(2015) 東京書籍株式会社
- (2) 「新しい数学 3年 教師用指導書 指導編」(2015) 東京書籍株式会社
- (3) 文部科学省(2008)「中学校学習指導要領」東山書房
- (4) 文部科学省(2008)「中学校学習指導要領解説 数学編」教育出版株式会社
- (5) 文部科学省(2016)「平成28年8月26日中央教育審議会教育課程部会資料」：文部科学省
- (6) GeoGebra (<https://www.geogebra.org>)

(平成29年9月29日受理)