Morley の定理とその unexpected variant について

*鎌　田　博　行

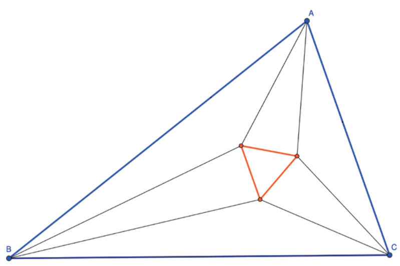
Morley's theorem and its unexpected variant

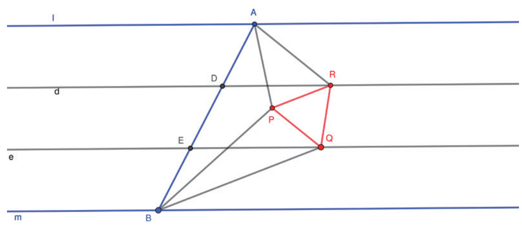
KAMADA　Hiroyuki

概要　「三角形の内角の三等分線のうち辺に近いものどうしの交点は正三角形をなす」という定理は Morley の定理または Morley の奇跡としてよく知られている。本稿では，Morley の定理とその unexpected variant（予期せぬ変種）について，大学における授業実践や教員免許状更新講習で行った Connes の定理を用いた統一的な証明を紹介し，中学校・高等学校および大学における数学教育との関連について述べる。

Abstract It is well-known as Morley's theorem or Morley's miracle that "The three intersections of the trisectors of the angles of a triangle, lying near the three sides respectively, form an equilateral triangle." In this article, we introduce Morley's theorem and its unexpected variant, together with their unified proof as an application of Connes' theorem, which were given partly in university lectures and teaching certificate renewal courses, and mention relationships with mathematics education in secondary schools and universities.

Key words： Morley（モーリー）の定理，Connes（コンヌ）の定理，複素数平面，回転と平行移動，GeoGebra，林鶴一





＊　宮城教育大学数学教育講座

1　はじめに

「三角形の内角の三等分線の辺に近いものどうしの交点は正三角形をなす」という定理は，1899 年頃アメリカの数学者 Frank Morley（フランク･モーリー）により発見され，以降，多くの数学者，数学愛好者を惹きつけ，これまで多くの様々な証明が得られている。例えば，数学者の Alain Connes[5] は，発見から約 100 年後の 1998 年に Morley の定理の新証明を得ている。Alexander Bogomolny は，ホームページ [2] において，Morley の定理の証明を幾つかの類型（Backward proofs, Trigonometric proofs, Synthetic proofs, Algebraic proofs など）にわけて紹介していたが，Connes の証明は，ある種の体上で成り立つ非自明な代数的恒等式（Connes の定理）を，特に複素数体 $\mathbb{C}$ に適用することから得られるため，上記 [2] では Algebraic proofs として紹介されている ([4])。

ところで，三角形に関する諸定理の１点を無限遠に飛ばすことにより，様々な変種を得ることがある。Morley の定理については，Hammick によりそのような変種（以下 Hammick の変種と呼ぶ）が得られており，Bogomolny のホームページ [3] において，An Unexpected Variant として紹介されている。Hammick の変種は，少なくとも筆者は他でみかけたことがなく，Morley の定理自身に比べてあまり知られていないように思われる。本稿では，Morley の定理とその予期せぬ変種である Hammick の変種について，Connes の定理を用いた統一的証明を，教員免許状更新講習 [22, 23] や学部･大学院における授業実践に沿った形で紹介する。また読者の便宜のため，Connes の定理において本質的な役割を果たす恒等式の証明も与え，さらに，状況を表す図の作成手順を説明する。最後に，日本における Morley の定理の反響がうかがえる林鶴一の論説 [8] と Frank Morley から林鶴一に宛てた手簡 [14] の一部を紹介する。

なお，Connes による Morley の定理の証明は大学の公開講座 [13] でも取り上げられ，その解説については，Connes 自身による [6] や，Geiges による [7] があり，日本語で書かれたものでは [15] がある。

2　Connes の定理

まず，Morley の定理から一度離れて，次の問を出題した：

問 1　$a \neq 0,\ b$ を定数とする。x を変数とし $f(x) = ax + b$ に対して，$f(x) = x$ となる x が存在するとき，そのような x（f の固定点という）を全て求めよ。

(解答例)　$f(x) = ax + b = x$，すなわち，$(1 - a)x = b$ より，$a \neq 1$ のとき，$x = b/(1 - a)$ が f の固定点である。$a = 1$ かつ $b = 0$ のときは，$f(x) = x$ が恒等的に成り立つため，任意の x が固定点である。また，$a = 1$ かつ $b \neq 0$ のときは f は固定点を持たない（このような f を平行移動という）。　□

以下，$f(x) = ax + b$ に対して

$$\delta(f) = a, \quad \tau(f) = b$$

とおく。$\delta(f) \neq 1$ のとき f の固定点を $\mathrm{Fix}(f)$ と表す。

また，$f(x) = ax + b$，$g(x) = cx + d$ に対して，f と g の合成を fg と表す。すなわち，

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= f(g(x)) \\ &= a(cx + d) + b \\ &= (ac)x + (ad + b)\end{aligned}$$

である。f と g が一致しているときは，

$$f^2(x) = f(f(x)), \quad f^3(x) = f(f(f(x)))$$

などと表す。

以下の問 2〜問 4 においては，

$$f_k(x) = a_k x + b_k,\ k = 1, 2, 3$$

とする。

問 2　f_1f_2, f_2f_3, f_3f_1 のいずれもただ 1 つの固定点をもつとき，固定点 $\alpha = \mathrm{Fix}(f_1f_2)$, $\beta = \mathrm{Fix}(f_2f_3)$, $\gamma = \mathrm{Fix}(f_3f_1)$ をそれぞれ求めよ。

問 3　$f = f_1^3f_2^3f_3^3$ とおくとき，

$$\begin{aligned}\delta(f) &= a_1^3a_2^3a_3^3 = (a_1a_2a_3)^3,\\ \tau(f) &= (a_1^2+a_1+1)b_1\\ &\quad +a_1^3(a_2^2+a_2+1)b_2\\ &\quad +(a_1a_2)^2(a_3^2+a_3+1)b_3\end{aligned}$$

であることを確かめよ。

問 4　$j = a_1a_2a_3$ とおく。問 2 の仮定の下，$j^3 = 1,\ j \neq 1$ であるとき，$f = f_1^3f_2^3f_3^3$ に対して，

$$\begin{aligned}&\tau(f) =\\ &\quad -ja_1^2a_2(a_1-j)(a_2-j)(a_3-j)\\ &\quad\ \times(\alpha + j\beta + j^2\gamma)\end{aligned} \tag{1}$$

が成り立つことを示せ。ただし，α, β, γ はそれぞれ f_1f_2, f_2f_3, f_3f_1 の固定点である。

問 1 から問 3 は，現れる定数や変数の範囲についてあえて何も説明せずに発問したため，受講者は有理数体 $\mathbb{Q}$ や実数体 $\mathbb{R}$ 等を各自想定して解答していたと思われる。大学の授業では，問 1 に関連して連立 1 次方程式の解の存在条件（係数行列と拡大係数行列の階数に対する条件）を思い出させた。問 2 は概ね順調に求められていたが，問 3 はかなり手こずっていた受講者もいた。しかしながら，本質的には中学校の 1 次関数と 1 次方程式の内容といってよかろう。

さて，問 4 であるが，これが Connes の定理の本質的な部分である。問 3 までは，有理数体 $\mathbb{Q}$ や実数体 $\mathbb{R}$ でもよかったが，問 4 では、$j^3 = 1$ かつ $j \neq 1$ なる j（すなわち 1 の 1 以外の立方根）が現れるため，ここに至って考える定数や変数が有理数や実数でないことが明らかになる。以下，1 つの解答例をあげる：

問 4 の解答例　問 2 によれば，

$$\alpha = \frac{a_1b_2+b_1}{1-a_1a_2},\quad \beta = \frac{a_2b_3+b_2}{1-a_2a_3},\quad \gamma = \frac{a_3b_1+b_3}{1-a_3a_1}$$

である。これを (1) の右辺に代入して，$j = a_1a_2a_3 \neq 1,\ j^3 = 1$ を用いて書き換えていく。

まず，$j = a_1a_2a_3$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{a_1b_2+b_1}{1-a_1a_2} = \frac{a_3b_1+a_3a_1b_2}{a_3(1-a_1a_2)}\\ &= \frac{a_3}{a_3-j}b_1 + \frac{a_3a_1}{a_3-j}b_2\end{aligned}$$

であり，同様にして，

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{a_1}{a_1-j}b_2 + \frac{a_1a_2}{a_1-j}b_3,\\ \gamma &= \frac{a_2}{a_2-j}b_3 + \frac{a_2a_3}{a_2-j}b_1\end{aligned}$$

である。ここで，

$$\begin{aligned}&\alpha + j\beta + j^2\gamma\\ &\quad= \left(\frac{a_3}{a_3-j} + \frac{j^2a_2a_3}{a_2-j}\right)b_1\\ &\qquad + \left(\frac{a_3a_1}{a_3-j} + \frac{ja_1}{a_1-j}\right)b_2\\ &\qquad + \left(\frac{ja_1a_2}{a_1-j} + \frac{j^2a_2}{a_2-j}\right)b_3\\ &\quad= C_1b_1 + C_2b_2 + C_3b_3\end{aligned}$$

とおくと，$j^3 = 1$ を用いて，

$$\begin{aligned}&-ja_1^2a_2C_1\\ &\quad= \frac{-ja_1^2a_2a_3\{(a_2-j)+(a_3-j)j^2a_2\}}{(a_3-j)(a_2-j)}\\ &\quad= \frac{j^2a_1(j-j^2a_2a_3)}{(a_3-j)(a_2-j)} = \frac{a_1(1-ja_2a_3)}{(a_3-j)(a_2-j)}\\ &\quad= \frac{a_1(a_1-j)(1-ja_2a_3)}{(a_1-j)(a_2-j)(a_3-j)}\end{aligned}$$

を得る。さらに, $a_1a_2a_3 = j$, $j^3 = 1$, および $1 + j + j^2 = 0$ を用いて,

$$
\begin{aligned}
&a_1(a_1 - j)(1 - ja_2a_3) \\
&\quad = a_1(a_1 - j - ja_1a_2a_3 + j^2a_2a_3) \\
&\quad = a_1(a_1 - j - j^2 + j^2a_2a_3) \\
&\quad = a_1^2 - (j + j^2)a_1 + j^2a_1a_2a_3 \\
&\quad = a_1^2 + a_1 + j^3 = a_1^2 + a_1 + 1
\end{aligned}
$$

である。したがって,

$$
-ja_1^2a_2C_1 = \frac{a_1^2 + a_1 + 1}{(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)}
$$

を得る。同様にして,

$$
\begin{aligned}
&-ja_1^2a_2C_2 \\
&\quad = \frac{-ja_1^3a_2(a_3(a_1 - j) + (a_3 - j)j)}{(a_3 - j)(a_1 - j)} \\
&\quad = \frac{a_1^3a_2(1 - ja_3a_1)}{(a_3 - j)(a_1 - j)} \\
&\quad = \frac{a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)}{(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)}, \\
&-ja_1^2a_2C_3 \\
&\quad = \frac{-j^2a_1^2a_2^2\{a_1(a_2 - j) + j(a_1 - j)\}}{(a_1 - j)(a_2 - j)} \\
&\quad = \frac{-j^2(a_1a_2)^2(a_1a_2 - j^2)}{(a_1 - j)(a_2 - j)} \\
&\quad = \frac{(a_1a_2)^3(a_3^2 + a_3 + 1)}{(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)}
\end{aligned}
$$

を得る。 これより (1) がしたがう。 □

以上の問から次の定理が得られる：

定理 (Connes [5]) $f_k(x) = a_kx + b_k$, $k = 1, 2, 3$ に対して，f_1f_2, f_2f_3, f_3f_1 および $f_1f_2f_3$ のいずれも平行移動ではないとし, $j = \delta(f_1f_2f_3)(= a_1a_2a_3)$ とする。このとき，次の 2 条件は同値である：

a) $f_1^3f_2^3f_3^3 = 1$(恒等変換)

b) $j^3 = 1$ かつ $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$.
ただし $\alpha = \mathrm{Fix}(f_1f_2)$, $\beta = \mathrm{Fix}(f_2f_3)$, $\gamma = \mathrm{Fix}(f_3f_1)$ である。

実際，f_1f_2, f_2f_3, f_3f_1 および $f_1f_2f_3$ が平行移動でないことから，$a_1a_2 \neq 1, a_2a_3 \neq 1, a_3a_1 \neq 1$ かつ $j = a_1a_2a_3 \neq 1$ なので，$j^3 = 1$ のとき $ja_1^2a_2(j - a_1)(j - a_2)(j - a_3) \neq 0$ に注意すると，a) を仮定すれば，問 3 より $j^3 = 1$ なので，問 4(1) から b) がしたがい，逆に b) から a) もしたがう。

問 4 の恒等式 (1) であるが，一度発見されれば，確かめるのは 1 の 3 乗根の性質を用いた高等学校レベルの恒等式の証明ともいえる。課題学習などで扱うことも可能であろうか。

3　Morley の定理

まず，Connes の定理の系として Morley の定理を示すための準備をする。

以下，定数や変数はすべて複素数の範囲で考え，変数は x の変わりに z を用いる。

まず，$f(z) = az + b$, $z \in \mathbb{C}$ ($a \neq 0$, b は定数) とおき, f を複素数平面 $\mathbb{C}$ 上の変換と考えるとき，次が成り立つ：

• $a \neq 1$ のとき，$\alpha = \mathrm{Fix}(f)$ とおくと，$f(z) = a(z - \alpha) + \alpha$, $z \in \mathbb{C}$ と表されるので，$|a| = 1$ ($a \neq 1$) であれば，f は点 α のまわりの $\arg a$-回転を表す。

• $a = 1$ のとき，f は平行移動または恒等変換を表す

• f と g がそれぞれある点まわりの回転または平行移動とするとき，f と g の合成 fg もまたある点のまわりの回転，平行移動または恒等変換である。特に $\arg\delta(f) + \arg\delta(g)$ が 2π の整数倍であれば fg は平行移動または恒等変換であり，そうでなければ fg はある点のまわりの回転角が $\arg\delta(f)+\arg\delta(g)$ の回転である。

以上の性質は，現行の高等学校の数学 III で扱われる複素数の演算（乗法と加法）の幾何学的意味から了解されるであろう [19, 20, 21]。ここに述べた性質は，中学校 1 年で学習する図形の移動と関連して，回転がその中心で交わる 2 直線に関する鏡映

（線対称変換（対称移動））の合成でかけ，平行移動が平行な 2 直線に関する鏡映の合成でかけることからもわかる。

Morley の定理の証明　複素数平面 $\mathbb{C}$ 上に △ABC が任意に与えられたとき，∠BAC = ∠A, ∠CBA = ∠B, ∠ACB = ∠C とおく。ただし，角は向きをこめて考える。

点 A のまわりの (2/3)∠A 回転を f_1, 点 B のまわりの (2/3)∠B 回転を f_2, 点 C のまわりの (2/3)∠C 回転を f_3 とすると，f_1^3, f_2^3, f_3^3 はそれぞれ点 A のまわりの 2∠A 回転，点 B のまわりの 2∠B 回転，点 C のまわりの 2∠C 回転を表すので，∠A+∠B+∠C = $\pm\pi$ より，$f = f_1^3 f_2^3 f_3^3$ は恒等変換かまたは平行移動である。

ここで，直線 BC に関して点 A と対称の位置にある点を A′ とすると，$f_3^3(A) = A'$, $f_2^3(A') = A$, $f_1^3(A) = A$ なので，

$$\begin{aligned} f(A) &= f_1^3 f_2^3 f_3^3(A) = f_1^3 f_2^3(A') \\ &= f_1^3(A) = A \end{aligned}$$

となり，f は A を固定点としてもち，$f = f_1^3 f_2^3 f_3^3$ は恒等変換である。また，$f_1 f_2$, $f_2 f_3$, $f_3 f_1$ および $f_1 f_2 f_3$ はいずれも平行移動ではない。したがって，Connes の定理より，$j = \delta(f_1 f_2 f_3)$ とおくとき，$j^3 = 1$ $(j \neq 1)$ かつ $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ が成り立つ。

一方，∠A の三等分線と ∠B の三等分線のうち辺 AB に近いものの交点を P とし，直線 AB に関して P と対称の位置にある点を P′ とすれば，$f_2(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$, $f_1(\mathrm{P}') = \mathrm{P}$ であるから，

$$f_1 f_2(\mathrm{P}) = f_1(\mathrm{P}') = \mathrm{P}$$

となり，P は $f_1 f_2$ の固定点であり，$\alpha = \mathrm{Fix}(f_1 f_2)$ と一致する。同様に，∠B の三等分線と ∠C の三等分線との辺 BC に近いものの交点を Q とし，∠C の三等分線と ∠A の三等分線の辺 AC に近いものの交点を R とすれば，Q, R はそれぞれ $\beta = \mathrm{Fix}(f_2 f_3)$, $\gamma = \mathrm{Fix}(f_3 f_1)$ と一致する。

したがって，高等学校の数学 III でも扱われる次の補題より，α, β, γ が表す 3 点 P, Q, R は正三角形をなす（[19, 20, 21] 参照)。 □

補題　複素平面 $\mathbb{C}$ 上の相異なる 3 点 P, Q, R を表す複素数をそれぞれ α, β, γ とするとき，次は同値である：

(i) 3 点 P, Q, R は正三角形をなす。

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$ が成り立つ。

(iii) $j^3 = 1$, $j \neq 1$ なる複素数 j によって，$\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ が成り立つ。

実際，$j^3 = 1$, $j \neq 1$ とするとき，$j = \cos(2\pi/3) \pm i\sin(2\pi/3)$ (i は虚数単位) と表されるので，$j^2 + j + 1 = 0$ に注意すれば，

$$\alpha + j\beta + j^2\gamma = (\alpha - \gamma) + j(\beta - \gamma)$$

が成り立つ。このことから (i) と (iii) の同値性がわかる。(ii) と (iii) の同値性は，因数分解

$$\begin{aligned} & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha \\ = \ & (\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma) \end{aligned}$$

からしたがう。ただし，$\omega = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$ であり，$j = \omega$ または $j = \omega^2$ のいずれかとなる。

4　Unexpected variant

Larry Hammick による Morley の定理の unexpected variant は，形式的には Morley の定理において与えられた三角形の 1 点を無限遠点に飛ばしたものと考えられ，次のように述べられる：

定理 (Hammick の変種 ([3]))　平行な 2 直線 l と m に第 3 の直線がそれぞれ点 A と点 B で交わっているとき，同傍内角 ∠A と ∠B のそれぞれの三等分線と 2 直線 l と m

に平行な線分 AB の三等分線を考える。それらのうち，∠A の三等分線と ∠B の三等分線の直線 AB に近いものどうしの交点を P とする。また，∠B の三等分線と l と m に平行な線分 AB の三等分線のうち直線 m に近いものの交点を Q とし，∠A の三等分線と l と m に平行な線分 AB の三等分線のうち直線 l に近いものの交点を R とする。このとき，3 点 P, Q, R は正三角形をなす。

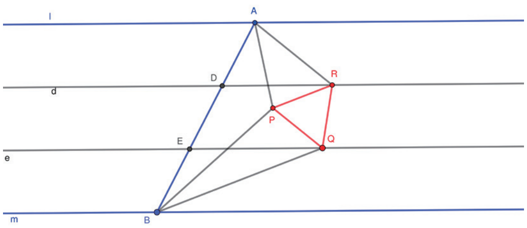


図 1: Hammick の変種

Hammick の変種の証明　点 A のまわりの $(2/3)\angle \mathrm{A}$ 回転を f_1 とし，点 B のまわりの $(2/3)\angle \mathrm{B}$ 回転を f_2 とする。また，l と m に平行な線分 AB の三等分線に関する線対称変換を l から m に向かう順に合成して得られる平行移動を f_3 とする。このとき，$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} = \pi$ より，$f = f_1^3 f_2^3 f_3^3$ は恒等変換かまたは平行移動である。

(Step 1)： $f = f_1^3 f_2^3 f_3^3$ が恒等変換であることを示す。

簡単のため，$g_1 = f_1^3$, $g_2 = f_2^3$, $g_3 = f_3^3$ とおき，直線 m に関する点 A の対称点を A' とすると，$g_3(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$, $g_2(\mathrm{A}') = \mathrm{A}$, $g_1(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ であるから，

$$\begin{aligned} f(\mathrm{A}) &= g_1 g_2 g_3(\mathrm{A}) = g_1 g_2(\mathrm{A}') \\ &= g_1(\mathrm{A}) = \mathrm{A} \end{aligned}$$

が成り立ち，$f = f_1^3 f_2^3 f_3^3$ は A を固定点としてもつので，$f = f_1^3 f_2^3 f_3^3$ は恒等変換である。

ここで，$f_1 f_2$, $f_2 f_3$, $f_3 f_1$ および $f_1 f_2 f_3$ はいずれも平行移動でないので，Connes の

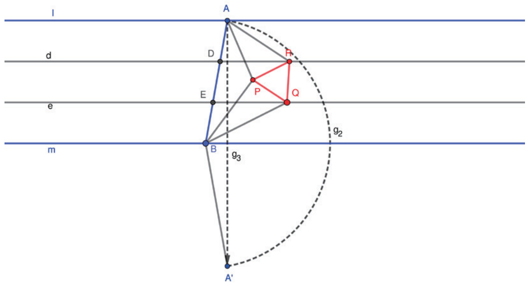


図 2: Hammick の変種の証明（Step 1）

定理と前節の補題により，$\alpha = \mathrm{Fix}(f_1 f_2)$, $\beta = \mathrm{Fix}(f_2 f_3)$, $\gamma = \mathrm{Fix}(f_3 f_1)$ は正三角形をなす。

(Step 2)：$\alpha = \mathrm{Fix}(f_1 f_2)$, $\beta = \mathrm{Fix}(f_2 f_3)$, $\gamma = \mathrm{Fix}(f_3 f_1)$ が P, Q, R と一致することを示す。

まず，$\alpha = \mathrm{Fix}(f_1 f_2)$ は，前節の Morley の定理の証明と全く同様に ∠A と ∠B のそれぞれの三等分線のうち直線 AB に近いものの交点 P であることがわかる。

次に，$\beta = \mathrm{Fix}(f_2 f_3)$ は ∠B の三等分線と l と m に平行な線分 AB の三等分線のうち m に近いものとの交点 Q である。実際，点 Q と直線 m に関して対称の位置にある点を Q' とすると，$f_3(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}'$ かつ $f_2(\mathrm{Q}') = \mathrm{Q}$ であるから，$f_2 f_3(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}$ となり，Q と $\beta = \mathrm{Fix}(f_2 f_3)$ は一致する。

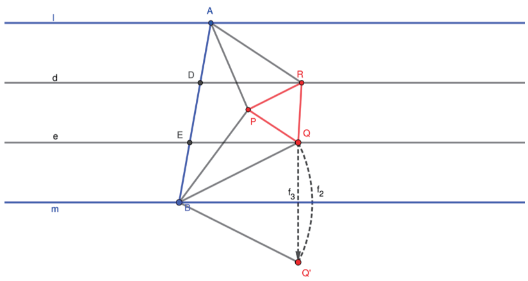


図 3: Hammick の変種の証明（Step 2）

同様に，$\gamma = \mathrm{Fix}(f_3 f_1)$ は ∠A の三等分線と l と m に平行な線分 AB の三等分線のうち l に近いものとの交点 R であるから，3 点 P, Q, R が正三角形をなすことがしたがう。 □

5　図について

本稿では，フリーの動的数学ソフトウエア GeoGebra を用いて図を描いている（GeoGebra を利用した授業実践として [12] がある）。Hammick の変種は，Morley の定理の三角形の 1 点を形式的に無限遠点に飛ばしたものとして紹介したが，GeoGebra で Morley の定理の状況を描いた後で，点を動かしてみると確かに成り立ちそうなことが見て取れる（ただし，実際の授業等では図形を動かすことはしなかった）。しかしながら,「角の大きさ」や「線分の長さ」,「正三角形であるという性質」は，射影で保たれないため，通常の Morley の定理を単純に射影することで Hammick の変種が得られるわけではない。Bogomolny はその意味で “unexpected” と呼んだのかもしれない [1]。

さて，Morley の定理や Hammick の変種が成り立つ状況を図に示す際，どのように図を描けばよいだろうか。GeoGebra には与えられた角を三等分する機能はないので多少の工夫が必要となる。

以下参考まで，図 3 の描画の手順の一例を紹介する（用いる機能を「 」で表す）。

1. 「点」を用いて，同一直線上にない 3 点 A, B, C をとる。
2. 「2 点を通る直線」を用いて，直線 BC をひく (名前は m に変更する)。
3. 「点」を用いて，直線 BC 外の 1 点 D をとる。
4. 「2 点を通る半直線」を用いて，半直線 BD をひく（半直線 BD のラベルは非表示にする）。
5. 「直線に関する鏡映」を用いて，直線 BD に関して点 C と対称の位置にある点 C′ を表示する。
6. 「2 点を通る半直線」を用いて，半直線 BC′ をひく。
7. 「直線に関する鏡映」を用いて，直線 BC′ に関して点 D と対称の位置にある点 D′ を表示する。
8. 「2 点を通る半直線」を用いて半直線 BD′ をひく。
9. 「移動」を用いて，点 D を適当に動かして，点 D′ が見やすい位置に移動する。
10. 「点に関する鏡映」を用いて，点 D′ に関して点 B と対称の位置にある点 B′ をとる。
11. 同じく「点に関する鏡映」を用いて，点 B′ に関して点 D′ と対称の位置にある点 D″ をとる。
12. 点 A を削除して，点 D″ の名前を変更し改めて点 A とする。
13. 「平行線」を用いて,（変更後の）点 A を通り直線 m に平行な直線 l をひく。同様にして，点 B′，D′ を通り m に平行な直線 d，e をそれぞれひく。
14. 「2 つのオブジェクトの交点」を用いて，直線 BD と直線 e の交点を求め，点 Q とする。
15. 「2 つのオブジェクトの交点」を用いて，直線 BC′ と直線 d の交点 E とし，直線 BD と直線 d の交点 F とする。
16. 「角度を指定して点のまわりにオブジェクトを回転」を用いて，点 E を点 Q のまわりに時計まわりと反時計まわりにそれぞれ 30° 回転した点をそれぞれ E′ と E_1' とする。
17. 「2 点を通る半直線」を用いて，半直線 QE′ と半直線 QE_1' をひく。

[1] Alexander Bogomolny 氏は 2018 年 7 月 7 日に亡くなられた（[1]）。

18. 「2つのオブジェクトの交点」を用いて，半直線 QE' と直線 BE の交点を P とし，半直線 QE'_1 と直線 d との交点を R とする（半直線 QE' と QE'_1 のオブジェクトを非表示にする）。

19. 「2点を結ぶ線分」を用いて，線分 PQ, QR, RP をかけば，△PQR は正三角形である。

20. 引き続き「2点を結ぶ線分」を用いて，線分 AP, AR を結べば，これらは $\angle A$ を三等分する。

ここで，不要なオブジェクトを非表示にして，足りないオブジェクトを追加し，ラベルの名前を変えたり，位置をずらしたり，非表示にするなどして図を整えると、図1の原型を得る。さらに，

21. 「直線に関する鏡映」を用いて，点 Q の直線 m に関する対称点 Q' をとり,「2点を結ぶ線分」を用いて，線分 BQ' をかく。

22. 「2点を結ぶベクトル」を用いて，点 Q から点 Q' まで矢印ベクトルを表示する（スタイルを点線に変更し名前は f_3 に変更した）。

23. 「中心と弧上の2点で決まる円弧」を用いて，中心が B で点 Q' から点 Q への円弧をかく（スタイルを点線に変更し名前は f_2 に変更した）。

あとは，適当に整えてから，オブジェクトのスタイルを変えたり色を付ければ図3が得られる。同様にして，Morley の定理そのものの状況を表す図を描くこともできる。各自確認されたい。

6　おわりに

Morley の定理をその証明と共に初めて目にしたのは，モノグラフ [18] と思われる。その後，卒業研究（2013 年度）のテキスト [16] で再会し，Connes の論文 [5] を教わり，免許状更新講習 [22, 23] で紹介した [2]。

ところで，Morley の定理について，Morley 自身がどのようにして定理を発見したのかが素朴な疑問として浮かぶ。また，Morley の定理を日本では誰がどのように紹介したかという点についても，免許状更新講習や授業で取り上げた時点では不明であったが，今年度（2018 年度）の卒業研究に使用しているテキスト [9] の中で Morley の定理が問題として出題されており,「註 F. Morley は Cardioid の接線を用いてこの興味深い定理を発見した.（F. Morley, J. M. E. Vol. 6, p. 260)」という記述が見つかった（しかし，MathsciNet で検索をかけても，Frank Morley の J. M. E. の論文は見つからなかった）。一方，文献 [17] の「付録5 モーリーの奇跡」の中に，コクセターの書いていることとして，次の記述がある :「モーリーはこの定理を友人たちに教え、その友人たちが数学のゴシップとして世界中に定理を広めた。この定理は、もっとも意外で驚異的な数学の定理のひとつであり、他に類を見ない純粋な美を宿した至宝として喧伝された。20 年後、モーリーはこの定理を日本で発表した。」結局，J. M. E. は日本中等教育数学会雑誌の略であり，上記註の論文は，Frank Morley 本人が林鶴一に宛てた手簡 [14] であった。

さて，日本では，國枝元治が Morley の定理を証明する問題 [10] を出題し，その純幾何学的証明が [11] に与えられている。林鶴一は論説 [8] においてこの問題を取り上げ，当時の文献と共に三角法による証明等を紹介している。以下，当時の雰囲気が感じられる部分を引用する :「本誌第5巻, 1923, p. 245 に於て國枝教授の提出せられたる「任意の三角形の角の三等分線の辺

[2] Connes の論文 [5] をご教示戴いた藤岡敦氏，免許状更新講習 [22] の機会を下さった金濱千明氏，及川伸也氏に感謝申し上げます。

に近き交点が正三角形を作る」との問題は甚しく我等の注意を惹き起した．特に東京高等師範学校数学教室に於て種々論議されたというによりて興味を喚ったのである．従って此の種の問題については抜群の手腕ある人々進んで之れが解答を作られ本誌第6巻1924, pp. 108–109に於て公表せられたのである．いかにも任意の三角形の角の二等分線に関する問題は頗る多いのであるけれども，其の三等分線に関するものは殆んど見当らず，しかも上述の如く正三角形を作るというが如き美麗なるものはないのである．ここに於て余は此の定理の来歴を得んとつとめたのである．遂に其の発見者Frank Morley教授の手簡（此の文の次ぎに掲載せる）を得るに至って此の小文を書いて見たのである．（後略）」

一方，Frank Morleyの手簡[14]には次のようにある：

Dear Professor Hayashi:-

I have not published the theorem.[3] It arose from the consideration of cardioids.

（中略）

That was the argument. Verification is naturally a much simpler matter. If you think above worth printing I shall be very pleased to have it appear in a Japanese journal. （後略）

参考文献

[1] Alexander Bogomolny, Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles (https://www.cut-the-knot.org/)

[2] Alexander Bogomolny, Morley's Miracle (http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/)

[3] Alexander Bogomolny, Morley's Miracle: An Unexpected Variant (https://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/Larry.shtml)

[4] Alexander Bogomolny, Morley's Redux and More (http://www.cut-the-knot.org/ctk/MorleysRedux.shtml)

[5] Alain Connes, *A new proof of Morley's theorem*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., S88 (1998), 43–46

[6] Alain Connes, *Symmetry*, European Mathematical Society Newsletter, **54** (2004), 11–18

[7] Hansjörg Geiges, *Beweis des Satzes von Morley nach A. Connes*, Elemente der Mathematik **56** (2001), 137–142

[8] 林鶴一, 三角形ノ角ノ三等分線ニ就テ, 日本中等教育数学会雑誌, 第6巻, 日本中等教育数学会, 1924年, 255–259

[9] 小林幹雄, 複素数の幾何学, 共立出版, 1953年

[10] 國枝元治, 36 幾何学ノ一問題, 日本中等教育数学会雑誌, 第5巻, 日本中等教育数学会, 1923年, 245

[11] 問題36ノ解答, 日本中等教育数学会雑誌, 第6巻, 日本中等教育数学会, 1924年, 108–109

[12] 森岡正臣・米川聡, 動的数学ソフトGeoGebraを利用した授業実践–中学校第3学年図形分野における授業づくりを通して–, 宮城教育大学紀要, 第52巻, 2017年, 103–112

[13] 森脇淳, モーリーの定理のコンヌによる拡張, 京都大学理学研究科数学教室公開講座「現代数学展望」(2013年8月1日) (https://www.math.kyoto-u.ac.jp/old_pages/koukai.html)

[14] Frank Morley, *On the intersections of the trisectors of the angles of a triangle*, Journal of the Mathematical Association of Japan for Secondary Education, **6** (1924), 260–262 (日本中等教育数学会雑誌, 第6巻, 1924年, 260–262)

[15] モーリーの定理 (http://integers.hatenablog.com/entry/2017/08/30/022712)

[16] 難波誠, 平面図形の幾何学, 現代数学社, 2008年

[17] シュボーン・ロバーツ (糸川 洋 訳), 多面体と宇宙の謎に迫った幾何学者, 日経BP社, 2009年

[3] the theorem の直後に林により加えられたMorleyの定理の主張（本稿Abstract “ · · · ” の部分）は省略した。

[18] 清宮俊雄, 幾何学, モノグラフ 15, 科学新興社, 1968 年

[19] 俣野博，河野俊丈ほか，数学 III，東京書籍，2013 年

[20] 大島利雄ほか，数学 III，数研出版，2014 年

[21] 高橋陽一郎ほか，詳説 数学 III，啓林館，2013 年

[22] 鎌田博行,「授業力向上の視点 –主体的に学ぶ生徒の育成–」配付資料, 岩手県立総合教育センター, 2017 年 8 月 4 日

[23] 鎌田博行, 平成 30 年度免許状更新講習「リフレッシュ数学（幾何分野（B））」配付資料, 宮城教育大学, 2018 年 9 月 9 日

[24] GeoGebra (https://www.geogebra.org/)

追記 Morley の定理を証明する問題 [10] と共に次の記述がある :「因に本問題は東京高等師範学校数学教室で種々論議されていた折柄鹿児島七高中島宗治氏から同校講師 W. Süss 氏が話されたとのことで本会に提出されたので茲に出題した次第である（國枝)。」W. Süss については，日本中等教育数学会雑誌第 5 巻 (1923 年) 190 頁，雑報「七高ノ独語教師」において，次のように紹介されている :「此度七高に聘した独逸人 *Wilhelm Suss* と云う独語教師は余程数学に堪能な人で「ドクトル」である．同氏は「フランク. フルト」や「ベルリン」の大学に居たとき東北大学雑誌や *Math. Annalen* などに論文を提出したこともあるとの由で我邦の数学界にも何か盡したいと云う希望を有してをらるるそうである．因に同氏は二十八歳の秀才である.」（W. Süss は，後に Oberwolfach 数学研究所の初代所長を勤める。）

注 本文および追記では，引用文の片仮名表記を平仮名に改め，旧字体を新字体に改めた。

（平成30年 9 月28日受理）