実数の N 進小数展開の具体的表示について

*佐　藤　得　志

Explicit formula for N-adic expansions of real numbers

SATO　Tokushi

要　旨

N を 2 以上の自然数とするとき, 任意の (正の) 実数を N 進小数展開できることはよく知られているが, この N 進小数展開は, その整数部分の N 進展開と小数部分の N 進展開を合わせたものとして得られる. 本稿においては, 実数の小数部分の N 進展開を考え, その展開の係数を具体的に表示できることを証明する. また, よく知られている事実ではあるが, N 進展開の表示が一意的であるための必要十分条件を与え, これを証明する.

Key Words : N 進小数展開
実数の小数部分
N 進展開の係数
N 進展開の一意性

＊　宮城教育大学数学教育講座

1. 序

よく知られているように, 任意の (正の) 実数は 10 進法の小数で表すことができる. 例えば, $\frac{1}{3}$ を 10 進法の小数を用いて表すと,

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots$$

と表すことができる. この両辺を (形式的に) 3 倍すると,

$$1 = 0.999\cdots$$

となる. この左辺と右辺は, 一見すると異なるように見えるが, 後で示すようにこれは数学的には正しい式である (この事実は, 高校の「数学Ⅲ」の教科書にも述べられている). 一方, 1 を普通に 10 進法 (の小数) で表すと, もちろん

$$1 = 1.000\cdots$$

と表すこともできる. 従って, 1 の 10 進展開の表し方は一通りではない (一意的ではない). しかし, 大部分の (正の) 実数に対しては, 10 進展開の表し方は一意的であることも知られている.

一般に, N を 2 以上の自然数とするとき, 任意の (正の) 実数 a を N 進法の小数の形に展開することができ, これを a の N 進展開という. このとき, 先の例と同様に, N 進展開の表し方が一意的でないものも存在するが, 大部分の実数 a に対しては N 進展開の表し方は一意的である. 実数の N 進展開は, その整数部分の N 進展開と小数部分の N 進展開を合わせて得られるのであるが, 小数部分の N 進展開に関する議論が本質的である.

集合論においては, 実数の N 進展開可能性を用いて, 連続の濃度 (実数全体の集合の ‘元の個数’) が可算の濃度 (自然数全体の集合の ‘元の個数’) よりも真に大きいという事実が証明されることが多い. この事実は, より高度な数学の理論を展開する上で, その根底をなす事実の一つである. しかしながら, 通常の集合論の教科書では, その議論の前提となる実数の N 進展開可能性が証明されていない場合も多い (松坂 (1968), 内田 (1986) 等). これは, 集合論の中では実数の集合を既知のものとみなし, これ自体をきちんと扱うことを目的としていないからであると思われる. 一方, 実数を本格的に扱うような微分積分学の教科書でも, この事実の証明が述べられているものは少ない. その中でも, 大田 (2012), 砂田 (2017) (及び 赤 (2014) ($N = 10$ のとき)) においては, 実数の N 進展開可能性の証明が述べられている. 特に, 砂田 (2017) (及び 赤 (2014)) においては, 与えられた実数の小数部分の N 進展開の係数に対する漸化式を与え, これを用いて実数の N 進展開可能性が証明されている.

本稿においては, 更に詳しく, 実数の小数部分 (i.e. 0 と 1 の間の実数) に対し, その N 進展開の係数の具体的な表示を与える. 実際には, これらの係数がみたすべき条件から最初のいくつかの係数を具体的に表示してその一般形を推測し, これを用いて N 進展開できることを証明する. 更に, よく知られている事実ではあるが, N 進展開の表し方が一意的であるための必要十分条件を与え, これを証明する.

なお, 本稿の内容は, 本学の初等教育教員養成課程の教科科目「数学」(いわゆる「小専数学」) において, その授業内容の一部として取り入れている.

2. 準備

以下において, 実数全体の集合を $\mathbf{R}$ と表し, 自然数全体, 整数全体の集合をそれぞれ

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$
$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

と表す. 従って, $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $l \in \mathbf{Z}$ はそれぞれ, a が実数, n が自然数, l が整数であることを意味する. また, 正の実数全体の集合, 及び, $0 < a < 1$, $0 \leq a < 1$ をみたすような実数 a 全体の集合をそれぞれ

$$(0, \infty) = \{a \in \mathbf{R} \mid a > 0\},$$
$$(0,1) = \{a \in \mathbf{R} \mid 0 < a < 1\},$$
$$[0,1) = \{a \in \mathbf{R} \mid 0 \leq a < 1\}$$

と表す. 更に, $k, l \in \mathbf{Z}$, $k \leq l$ に対し,

$$\mathbf{N}_k = \{j \in \mathbf{N} \mid j \geq k\},$$
$$\mathbf{N}_{k,l} = \{j \in \mathbf{N} \mid k \leq j \leq l\}$$

と表すことにする (この記法は必ず一般的なものではない).

まず, N 進展開の意味を明確にするため, 数列とその極限について復習しておく. (数列, 極限はそれぞれ「数学B」,「数学Ⅲ」において学習する事柄である. 但し, ここでの極限の定義 (定義 2.2 (i)) は, 数学的に

厳密なものであるが, その表現の仕方が難しいため, 高等学校の数学の範囲外のものである.)

定義 2.1. (i) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n \in \mathbf{R}$ が与えられているとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を数列 (または実数列) という.

(ii) 数列 $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(= \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty})$ に対し,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \quad (n \in \mathbf{N})$$

と書き, これを $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ の第 n 部分和という. □

定義 2.2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ を数列とする.

(i) $a \in \mathbf{R}$ とするとき, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束するとは,

$$\begin{cases} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し, } n_\varepsilon \in \mathbf{N} \text{ が存在して} \\ \qquad n \in \mathbf{N}_{n_\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon \end{cases}$$

をみたすことである. このとき, a を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限といい,

$$a_n \to a \quad \text{as } n \to \infty, \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = a$$

と表す.

(ii) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとは, ある $a \in \mathbf{R}$ が存在して, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束することである.

(iii) 級数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ が収束するとは, 数列 $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \right\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することである. このとき, その極限を (再び) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(= \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \right)$ と表す. i.e.

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \to \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \quad \text{as } n \to \infty. \qquad \square$$

注意 2.1. (i) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbf{R}$ に収束するということは, $n \in \mathbf{N}$ を十分に大きくすれば, $|a_n - a|$ がいくらでも小さくなること, i.e. a_n が a にいくらでも近付いていくことを意味する.

(ii) 数列の和や級数の記号において, 下端の数字を 1 以外の整数として用いることもある (その場合の記号の意味は明らかであろう). □

以下においては, 数列や級数の収束に関しては, 定義 2.2 (i) に従った厳密な取り扱いはせず, 高校で扱われる範囲で議論を行うことにする. 次の事実も証明なしで用いる.

命題 2.1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を数列とし, $a, b, c \in \mathbf{R}$ とすると, 次が成り立つ.

(i) $a_n \leq b_n$ $(n \in \mathbf{N})$,

$$a_n \to a, \ b_n \to b \quad \text{as } n \to \infty$$

ならば, $a \leq b$.

(ii) (極限の一意性) $a_n \to a, \ a_n \to b$ as $n \to \infty$ ならば, $a = b$.

(iii) (はさみうちの原理) $a_n \leq c_n \leq b_n$ $(n \in \mathbf{N})$,

$$a_n \to a, \ b_n \to a \quad \text{as } n \to \infty$$

ならば,

$$c_n \to a \quad \text{as } n \to \infty.$$

(iv) $$a_n \to a, \ b_n \to b \quad \text{as } n \to \infty$$

ならば,

$$a_n + b_n \to a + b, \ ca_n \to ca \quad \text{as } n \to \infty. \qquad \square$$

いま, 収束数列の典型的な例を挙げておく. ここで,

$$\mathbf{N}_2 = \{N \in \mathbf{N} \mid N \geq 2\}$$

は 2 以上の自然数全体の集合である.

例 2.1. (i) $a_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$ とおくと,

$$a_n = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

(ii) $r \in (0,1)$ のとき, $a_n = r^n$ $(n \in \mathbf{N})$ とおくと,

$$a_n = r^n \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

(iii) $N \in \mathbf{N}_2$ のとき, $a_n = \dfrac{1}{N^n}$ $(n \in \mathbf{N})$ とおくと,

$$a_n = \frac{1}{N^n} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \qquad \square$$

次の事実は「数学 B」,「数学 Ⅲ」において学習する事柄 (等比数列の和, 等比級数の収束) であるが, ここでこれを証明しておく.

定理 2.1. $r \in (0,1)$ とすると, 次が成り立つ.

(i) $$\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r(1 - r^n)}{1 - r} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

(ii) $$\sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{1 - r}.$$

証明. (i)

$$\begin{aligned} r + r \sum_{k=1}^{n} r^k &= r + \sum_{k=1}^{n} r^{k+1} \\ &= r + (r^2 + r^3 + \cdots + r^n + r^{n+1}) \end{aligned}$$

$$= (r + r^2 + \cdots + r^n) + r^{n+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} r^k + r^{n+1}$$

であるから,

$$r - r^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} r^k - r\sum_{k=1}^{n} r^k,$$
$$r(1-r^n) = (1-r)\sum_{k=1}^{n} r^k,$$
$$\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r(1-r^n)}{1-r}$$

が成り立つ.

(ii) 例 2.1 (ii) によって $r^n \to 0$ as $n \to \infty$ であるから,

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r(1-r^n)}{1-r} \to \frac{r(1-0)}{1-r} = \frac{r}{1-r} \quad \text{as } n \to \infty$$

が得られる. □

これより, 次が得られる.

系 2.1. $N \in \mathbf{N}_2$ とすると, 次が成り立つ.

(i) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N-1}{N^k} = 1.$$

(ii) $$\sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^k} = \frac{1}{N^l} \quad (l \in \mathbf{N}).$$

証明. (i) 定理 2.1 (ii) によって

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N-1}{N^k} = (N-1)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^k$$
$$= (N-1)\frac{\frac{1}{N}}{1-\frac{1}{N}} = 1$$

が成り立つ.

(ii) (i) により,

$$\sum_{k=l+1}^{n} \frac{N-1}{N^k}$$
$$= \frac{N-1}{N^{l+1}} + \frac{N-1}{N^{l+2}} + \cdots + \frac{N-1}{N^{l+(n-l)}}$$
$$= \frac{1}{N^l}\left(\frac{N-1}{N} + \frac{N-1}{N^2} + \cdots + \frac{N-1}{N^{n-l}}\right)$$
$$= \frac{1}{N^l}\sum_{k=1}^{n-l}\frac{N-1}{N^k} \to \frac{1}{N^l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N-1}{N^k} = \frac{1}{N^l} \quad \text{as } n \to \infty$$

である. □

いま, 最初に述べた 10 進小数展開 $0.999\cdots$ の (正確な) 意味について考える.

$$0.9 = \frac{9}{10},\ 0.99 = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2},$$
$$0.999 = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3}$$

であり, 一般に, 0 の後に 9 が n 個並んだものは,

$$0.999\cdots 9 = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^n}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} \quad (n \in \mathbf{N})$$

を意味する. 従って, もしその ($n \to \infty$ のときの) 極限が存在するならば,

$$0.999\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} \left(= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k}\right)$$

として意味付けされる.

これに従うと, 系 2.1 (i) において $N = 10$ ととることにより,

$$0.999\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{10-1}{10^k} = 1$$

が成り立つことが分かる.

3. N 進展開可能性

次に, $N \in \mathbf{N}_2$, i.e. N を 2 以上の自然数とするとき, 任意に与えられた (正の) 実数 $a \in (0,\infty)$ を N 進展開することを考える.

定義 3.1. $b \in \mathbf{R}$ に対し, b 以下の最大の整数 $\lfloor b \rfloor$ ($\in \mathbf{Z}$) を b の整数部分, $b - \lfloor b \rfloor$ ($\in [0,1)$) を b の小数部分という. □

注意 3.1. $b \in \mathbf{R}$, $l \in \mathbf{Z}$ に対して次が成り立つ.

(i) $$l = \lfloor b \rfloor \iff l \le b < l+1.$$

特に, $\lfloor b \rfloor \le b < \lfloor b \rfloor + 1$ である.

(ii) $$\lfloor l \rfloor = l,\ \lfloor b + l \rfloor = \lfloor b \rfloor + l.$$ □

$a \in (0,\infty)$ とすると, $a - \lfloor a \rfloor \in [0,1)$ であるが, a の N 進展開は整数部分 $\lfloor a \rfloor$ ($\in \mathbf{N}_0$) の N 進展開と小数部分 $a - \lfloor a \rfloor$ ($\in [0,1)$) の N 進展開を合わせたものとなる. ここでは, 整数部分の N 進展開については述べずに, 小数部分 $a - \lfloor a \rfloor$ の N 進展開についてのみ考えることにする. そこで, 以下 $a \in (0,1)$ として a の N 進展開について考察する. まず, N 進展開の定義を述べる. ここで,

$$\mathbf{N}_{0,N-1}=\{0,1,2,\dots,N-1\}$$
である.

定義 3.2. $N\in\mathbf{N}_2$ とし, $a\in(0,1)$ とする. このとき, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k}$ が a の N 進展開であるとは, $\alpha_k\in\mathbf{N}_{0,N-1}$ $(k\in\mathbf{N})$ かつ

$$a=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k}\quad\left(\text{i.e. }\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{N^k}\to a\quad\text{as }n\to\infty\right)$$

をみたすことである. □

いま, 任意に与えられた $a\in(0,1)$ に対し, その N 進展開の係数 α_n $(n\in\mathbf{N})$ をどのようにして決定するかについて考える. このために, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k}$ を a の N 進展開とする (a の N 進展開 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k}$ が存在すると仮定する).

系 2.1 (ii) によって

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{N-1}{N^k}=\frac{1}{N^n}\quad(n\in\mathbf{N})$$

が成り立つことに注意する. このとき,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_1}{N}&\le\frac{\alpha_1}{N}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k}\le\frac{\alpha_1}{N}+\sum_{k=1+1}^{\infty}\frac{N-1}{N^k}\\&=\frac{\alpha_1}{N}+\frac{1}{N}=\frac{\alpha_1+1}{N}\end{aligned}$$

であり, $a=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k}=\frac{\alpha_1}{N}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k}$ であるから,

$$\frac{\alpha_1}{N}\le a\le\frac{\alpha_1+1}{N}$$

が成り立つ. また,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{N^k}+\frac{\alpha_n}{N^n}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{N^k}\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{N^k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k}\\&\le\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{N^k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{N-1}{N^k}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{N^k}+\frac{\alpha_n}{N^n}+\frac{1}{N^n}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{N^k}+\frac{\alpha_n+1}{N^n}\quad(n\in\mathbf{N}_2)\end{aligned}$$

であり, $a=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k}$ であるから,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{N^k}+\frac{\alpha_n}{N^n}\le a\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{N^k}+\frac{\alpha_n+1}{N^n}$$
$$(n\in\mathbf{N}_2)$$

が成り立つ.

ここでは,

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha_1}{N}\le a<\frac{\alpha_1+1}{N},\\&\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{N^k}+\frac{\alpha_n}{N^n}\le a<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{N^k}+\frac{\alpha_n+1}{N^n}\\&\qquad(n\in\mathbf{N}_2)\end{aligned}$$

と仮定して, N 進展開の係数 α_n $(n\in\mathbf{N})$ がどのように表示されるかを考察することにする.

$n=1$ のとき,

$$\frac{\alpha_1}{N}\le a<\frac{\alpha_1+1}{N},\ \alpha_1\le Na<\alpha_1+1$$

であるから, α_1 は Na 以下の最大の整数 $\lfloor Na\rfloor$ に等しい. ここで, $0\le a<1$ より, $\lfloor a\rfloor=0$ であることに注意すると,

$$\alpha_1=\lfloor Na\rfloor=\lfloor Na\rfloor-N\lfloor a\rfloor$$

が成り立つ.

$n=2$ のとき,

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha_1}{N}+\frac{\alpha_2}{N^2}\le a<\frac{\alpha_1}{N}+\frac{\alpha_2+1}{N^2},\\&\frac{\alpha_2}{N^2}\le a-\frac{\alpha_1}{N}<\frac{\alpha_2+1}{N^2},\\&\alpha_2\le N^2a-Na_1<\alpha_2+1\end{aligned}$$

より, $\alpha_2=\lfloor N^2a-N\alpha_1\rfloor$ であり, $-N\alpha_1\in\mathbf{Z}$ であるから, 注意 3.1 (ii) によって

$$\begin{aligned}\alpha_2&=\lfloor N^2a-N\alpha_1\rfloor=\lfloor N^2a+(-N\alpha_1)\rfloor\\&=\lfloor N^2a\rfloor+(-N\alpha_1)=\lfloor N^2a\rfloor-N\lfloor Na\rfloor\end{aligned}$$

が成り立つ.

$n=3$ のとき,

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha_1}{N}+\frac{\alpha_2}{N^2}+\frac{\alpha_3}{N^3}\le a<\frac{a_1}{N}+\frac{\alpha_2}{N^2}+\frac{\alpha_3+1}{N^3},\\&\frac{\alpha_3}{N^3}\le a-\frac{\alpha_1}{N}-\frac{\alpha_2}{N^2}<\frac{\alpha_3+1}{N^3},\\&\alpha_3\le N^3a-N^2\alpha_1-N\alpha_2<\alpha_3+1\end{aligned}$$

であるから, 同様にして

$$\begin{aligned}\alpha_3&=\lfloor N^3a-N^2\alpha_1-N\alpha_2\rfloor\\&=\lfloor N^3a+(-N^2\alpha_1-N\alpha_2)\rfloor\\&=\lfloor N^3a\rfloor+(-N^2\alpha_1-N\alpha_2)\\&=\lfloor N^3a\rfloor-N^2(\lfloor Na\rfloor-N\lfloor a\rfloor)\\&\qquad-N(\lfloor N^2a\rfloor-N\lfloor Na\rfloor)\\&=\lfloor N^3a\rfloor-N\lfloor N^2a\rfloor\end{aligned}$$

が成り立つ.

これらの表示式から推測できるように, 実は, a の N 進展開の係数 (の表し方の 1 つ) は次によって与えられることが分かる.

定理 3.1. $N \in \mathbf{N}_2$ とし, $a \in (0,1)$ とする. このとき,

$$\alpha_k[a] = \lfloor N^k a \rfloor - N\lfloor N^{k-1}a \rfloor \ \ (k \in \mathbf{N})$$

とおくと, $\alpha_k[a] \in \mathbf{N}_{0,N-1}$ $(k \in \mathbf{N})$ かつ

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k[a]}{N^k}$$

が成り立つ.

証明. (i) $k \in \mathbf{N}$ とすると, 注意 3.1 (i) により,

$$\lfloor N^k a \rfloor \leq N^k a < \lfloor N^k a \rfloor + 1,$$
$$\lfloor N^{k-1} a \rfloor \leq N^{k-1} a < \lfloor N^{k-1} a \rfloor + 1$$

であるから,

$$N^k a - 1 < \lfloor N^k a \rfloor \leq N^k a,$$
$$-N^k a \leq -N\lfloor N^{k-1}a \rfloor < -N(N^{k-1}a - 1)$$

が得られ, これらの辺々の和をとると,

$$-1 = (N^k a - 1) - N^k a < \lfloor N^k a \rfloor - N\lfloor N^{k-1}a \rfloor < N^k a - N(N^{k-1}a - 1) = N$$

が成り立つ. 従って,

$$-1 < \alpha_k[a] = \lfloor N^k a \rfloor - N\lfloor N^{k-1}a \rfloor < N,$$
$$\alpha_k[a] = \lfloor N^k a \rfloor - N\lfloor N^{k-1}a \rfloor \in \mathbf{Z}$$

であるから, $\alpha_k[a] \in \mathbf{N}_{0,N-1}$ $(k \in \mathbf{N})$ が成り立つ.

(ii) $n \in \mathbf{N}$ とすると, $\lfloor a \rfloor = 0$ より,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k[a]}{N^k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{N^k}(\lfloor N^k a \rfloor - N\lfloor N^{k-1}a \rfloor) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{N^k}\lfloor N^k a \rfloor - \frac{1}{N^{k-1}}\lfloor N^{k-1}a \rfloor \right) \\
&= \left(\frac{1}{N^n}\lfloor N^n a \rfloor - \frac{1}{N^{n-1}}\lfloor N^{n-1}a \rfloor \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{N^{n-1}}\lfloor N^{n-1} a \rfloor - \frac{1}{N^{n-2}}\lfloor N^{k-2}a \rfloor \right) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{1}{N^2}\lfloor N^2 a \rfloor - \frac{1}{N}\lfloor Na \rfloor \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{N}\lfloor Na \rfloor - \lfloor a \rfloor \right) \\
&= \frac{1}{N^n}\lfloor N^n a \rfloor - \lfloor a \rfloor = \frac{1}{N^n}\lfloor N^n a \rfloor \ \ (n \in \mathbf{N})
\end{aligned}$$

が得られる. このとき, 注意 3.1 (i) によって

$$N^n a - 1 < \lfloor N^n a \rfloor \leq N^n a,$$
$$a - \frac{1}{N^n} < \frac{1}{N^n}\lfloor N^n a \rfloor \leq a \ \ (n \in \mathbf{N})$$

であり,

$$a - \frac{1}{N^n} \to a, \ a \to a \quad \text{as } n \to \infty$$

であるから, 命題 2.1 (iii) によって

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k[a]}{N^k} = \frac{1}{N^n}\lfloor N^n a \rfloor \to a \quad \text{as } n \to \infty$$

が成り立つ. □

4. N 進展開の一意性

更に, $a \in (0,1)$ の N 進展開の表示の一意性について考える. まず, $a \in (0,1)$ に対して, 定理 3.1 とは見かけ上異なる N 進展開を与える.

命題 4.1. $N \in \mathbf{N}_2$ とし, $a \in (0,1)$ とする. このとき, $1-a \in (0,1)$ であり,

$$\tilde{\alpha}_k[a] = N - 1 - \alpha_k[1-a] \ \ (k \in \mathbf{N})$$

とおくと, $\tilde{\alpha}_k[a] \in \mathbf{N}_{0,N-1}$ $(k \in \mathbf{N})$ かつ

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k[a]}{N^k}$$

が成り立つ.

証明. $a \in (0,1)$ より, $1-a \in (0,1)$ であり, 定理 3.1 によって $\alpha_k[1-a] \in \mathbf{N}_{0,N-1}$ $(k \in \mathbf{N})$ かつ

$$1 - a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k[1-a]}{N^k}$$

が成り立つ. このとき,

$$\tilde{\alpha}_k[a] = N - 1 - \alpha_k[1-a] \in \mathbf{N}_{0,N-1} \ \ (k \in \mathbf{N})$$

であり, 系 2.1 (i) によって

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N-1}{N^k} = 1$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k[a]}{N^k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N - 1 - \alpha_k[1-a]}{N^k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N-1}{N^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k[1-a]}{N^k} \\
&= 1 - (1-a) = a
\end{aligned}$$

が成り立つ. □

いま, 定理 3.1 と命題 4.1 の (2 つの) N 進展開の表示式が一致するかどうか ($\alpha_n[a] = \tilde{\alpha}_n[a]$ $(n \in \mathbf{N})$

が成り立つかどうか) について考える．このために，次を定義する．ここで，

$$\mathbf{N}_{1,N-1} = \{1, 2, \ldots, N-1\}$$

である．

定義 4.1. $N \in \mathbf{N}_2$ に対し，

$$A_{N,1} = \left\{ \frac{\alpha_1}{N} \;\middle|\; \alpha_1 \in \mathbf{N}_{1,N-1} \right\},$$

$$A_{N,n} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{N^k} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbf{N}_{0,N-1}, \ \alpha_n \in \mathbf{N}_{1,N-1} \right\} \quad (n \in \mathbf{N}_2)$$

とおく．また，$n \in \mathbf{N}$ に関する $A_{N,n}$ の和集合を

$$A_N = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{N,n}$$

とする (これは，

$$a \in A_N \iff \text{ある } n \in \mathbf{N} \text{ に対して } a \in A_{N,n}$$

を意味する)． □

注意 4.1. $N \in \mathbf{N}_2$ とする．$n \in \mathbf{N}$ に対し，$a \in A_{N,n}$ であることは，a の N 進展開がちょうど n 桁で表示できることを意味する．従って，$a \in A_N$ であることは，a の N 進展開が有限桁で表示できることを意味する． □

まず，$a \in A_N$ のときには，a の N 進展開の表示は一意的でないことを示す．

定理 4.1. $N \in \mathbf{N}_2$, $n \in \mathbf{N}$ とし，$a \in A_{N,n}$, i.e.

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbf{N}_{0,N-1}, \ \alpha_n \in \mathbf{N}_{1,N-1}$$

($n = 1$ のときは $\alpha_1 \in \mathbf{N}_{1,N-1}$) が存在して，$a = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{N^k}$ と表すことができるとする．このとき，$a \in (0,1)$ であり，

$$\begin{aligned} a &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{N^k} + \frac{\alpha_n}{N^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{0}{N^k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{N^k} + \frac{\alpha_n - 1}{N^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^k} \end{aligned}$$

が成り立つ．

証明. 系 2.1 (i) により，

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\alpha_n}{N^n} \le a = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{N^k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{N-1}{N^k} \\ < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N-1}{N^k} = 1 \end{aligned}$$

であるから，$a \in (0,1)$ が成り立つ．

また，主張の最初の等号は明らかであり，系 2.1 (ii) によって $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^k} = \frac{1}{N^n}$ であるから，2 番目の等号も成り立つ． □

注意 4.2. 定理 4.1 において，a の N 進展開の 2 つの表示式

$$a = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{N^k} + \frac{\alpha_n}{N^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{0}{N^k},$$

$$a = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{N^k} + \frac{\alpha_n - 1}{N^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^k}$$

は，それぞれ定理 3.1, 命題 4.1 のものに対応している．i.e.

$$\alpha_k[a] = \begin{cases} \alpha_k & (k \in \mathbf{N}_{1,n-1}), \\ \alpha_n & (k = n), \\ 0 & (k \in \mathbf{N}_{n+1}), \end{cases}$$

$$\tilde{\alpha}_k[a] = \begin{cases} \alpha_k & (k \in \mathbf{N}_{1,n-1}), \\ \alpha_n - 1 & (k = n), \\ N-1 & (k \in \mathbf{N}_{n+1}) \end{cases}$$

が成り立つ． □

最後に，$a \notin A_N$ の場合には，a の N 進展開が一意的であることを示す．(従って，この場合には定理 3.1 と命題 4.1 の表示式は一致する.)

定理 4.2. $N \in \mathbf{N}_2$ とし，$a \in (0,1)$, $a \notin A_N$ とすると，a の N 進展開は一意的である．i.e.

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{N^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{N^k}$$

を a の (2 通りの) N 進展開とすると，

$$\alpha_n = \tilde{\alpha}_n \ \ (n \in \mathbf{N})$$

が成り立つ．

証明. これが成り立たないと仮定すると，ある $n \in \mathbf{N}$ に対して $\alpha_n \neq \tilde{\alpha}_n$ となるが，このような n のうち最小のものを n_0 とする．

(i) $n_0 = 1$ のとき，$\alpha_1 \neq \tilde{\alpha}_1$ であり，$\tilde{\alpha}_1 < \alpha_1$ または $\alpha_1 < \tilde{\alpha}_1$ が成り立つ．

いま，$\tilde{\alpha}_1 < \alpha_1$ と仮定すると，$\tilde{\alpha}_1 + 1 \le \alpha_1$ であり，

$$a = \frac{\alpha_1}{N} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k}{N^k} = \frac{\tilde{\alpha}_1}{N} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{N^k}$$

が成り立つ．ここで，系 2.1 (ii) より，

$$N \sum_{k=2}^{\infty} \frac{N-1}{N^k} = N \sum_{k=1+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^k} = N \frac{1}{N} = 1$$

であるから,

$$\alpha_1 = N\Big(a-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k}\Big) \le Na = \tilde{\alpha}_1 + N\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\tilde{\alpha}_k}{N^k} \le \tilde{\alpha}_1 + N\sum_{k=2}^{\infty}\frac{N-1}{N^k} = \tilde{\alpha}_1 + 1$$

が得られ, $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 + 1$ が成り立つ. 特に, 上の不等式はすべて等号が成り立つから,

$$N\Big(a-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k}\Big) = Na$$

が得られ,

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k} = 0$$

が成り立つ. 従って,

$$a = \frac{\alpha_1}{N} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k} = \frac{\alpha_1}{N} \in A_{N,1} \subset A_N$$

となり, 矛盾である.

$\alpha_1 < \tilde{\alpha}_1$ と仮定しても, 同様にして矛盾が導かれる.

(ii) $n_0 \in \mathbf{N}_2$, i.e. $n_0 \ge 2$ のとき, $\alpha_k = \tilde{\alpha}_k$ $(1 \le k \le n_0 - 1)$, $\alpha_{n_0} \ne \tilde{\alpha}_{n_0}$ であり, $\tilde{\alpha}_{n_0} < \alpha_{n_0}$ または $\alpha_{n_0} < \tilde{\alpha}_{n_0}$ が成り立つ.

いま, $\tilde{\alpha}_{n_0} < \alpha_{n_0}$ と仮定する. このとき, $\tilde{\alpha}_{n_0} + 1 \le \alpha_{n_0}$ であり,

$$a = \sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{\alpha_k}{N^k} + \frac{\alpha_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k} = \sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{\alpha_k}{N^k} + \frac{\tilde{\alpha}_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{\tilde{\alpha}_k}{N^k}$$

が成り立つ. ここで, 系 2.1 (ii) により,

$$N^{n_0}\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{N-1}{N^k} = N^{n_0}\frac{1}{N^{n_0}} = 1$$

であるから,

$$\begin{aligned}\alpha_{n_0} &= N^{n_0}\Big(a-\sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{\alpha_k}{N^k} - \sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k}\Big)\\ &\le N^{n_0}\Big(a-\sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{\alpha_k}{N^k}\Big)\\ &= N^{n_0}\Big(\frac{\tilde{\alpha}_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{\tilde{\alpha}_k}{N^k}\Big)\\ &= \tilde{\alpha}_{n_0} + N^{n_0}\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{\tilde{\alpha}_k}{N^k}\\ &\le \tilde{\alpha}_{n_0} + N^{n_0}\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{N-1}{N^k} = \tilde{\alpha}_{n_0} + 1\end{aligned}$$

が得られ, $\alpha_{n_0} = \tilde{\alpha}_{n_0} + 1$ が成り立つ. 特に, 上の不等式はすべて等号が成り立つから,

$$N^{n_0}\Big(a-\sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{\alpha_k}{N^k} - \sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k}\Big) = N^{n_0}\Big(a-\sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{\alpha_k}{N^k}\Big)$$

が得られ,

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k} = 0$$

が成り立つ. 従って,

$$a = \sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{\alpha_k}{N^k} + \frac{\alpha_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{N^k} = \sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{\alpha_k}{N^k} + \frac{\alpha_{n_0}}{N^{n_0}} \in A_{N,n_0} \subset A_N$$

となり, 矛盾である.

$\alpha_{n_0} < \tilde{\alpha}_{n_0}$ と仮定しても, 同様にして矛盾が導かれる. □

注意 4.3. $N \in \mathbf{N}_2$ とする.

(i) 有理数全体の集合を $\mathbf{Q}$ とすると, $A_N \subset \mathbf{Q}$ が成り立つ. $\mathbf{Q}$ は ($\mathbf{N}$ と同じく) 可算の濃度をもつから, A_N も可算の濃度をもつことが分かる. また, (0,1) は ($\mathbf{R}$ と同じく) 連続の濃度をもち, A_N が可算の濃度をもつことから, (0,1) から A_N を除いた集合 $(0,1)\setminus A_N$ は連続の濃度をもつことが分かる. もちろん, これらの集合は共に無限集合である.

(ii) 定理 4.2, 定理 4.1 により, $(0,1)\setminus A_N$ は N 進展開が一意的であるような $a \in (0,1)$ 全体の集合を表している. このとき, (i) により, $(0,1)\setminus A_N$ の濃度 (連続の濃度) は A_N の濃度 (可算の濃度) よりも真に大きい. i.e. $(0,1)\setminus A_N$ の ‘元の個数’ は A_N の ‘元の個数’ よりも (実際には, はるかに) 多い. この意味で, 大部分の ((0,1) に属する) 実数に対して N 進展開は一意的であると言ってよい. □

参考文献.

松坂和夫 (1968),
集合・位相入門, 岩波書店.

大田春外 (2012),
はじめての集合と位相, 日本評論社.

赤攝也 (2014),
実数論講義, 微分積分学 Ⅲ, 日本評論社.

砂田利一 (2017),
基幹講座 数学 微分積分, 東京図書.

内田伏一 (1986),
数学シリーズ 集合と位相, 裳華房.

（平成30年９月28日受理）