負の数の導入と加法の結合法則について

*鎌　田　博　行

Introduction of negative numbers and the associative law of addition

KAMADA Hiroyuki

概 要

負の数の導入と加法の結合法則をはじめとする演算法則とそれらの数学的背景に関する大学における授業実践と関連する考察を紹介する。

In this article, we introduce teaching practices at universities and related consideration concerning the introduction of negative numbers, the laws of calculations, including the associative law of addition, and their mathematical backgrounds.

Keywords： 正負の数，数の拡張，加法，乗法，結合法則，交換法則，分配法則，K 群

1　はじめに

現行の教科書（例えば [6, 7, 18]）では，中学校 1 年生の最初の単元において，数の範囲を負の数にまで拡張し，それらに対する四則演算を学ぶ。例えば，正負の数に対する足し算は，具体例を通じて導入され，その計算方法は小学校で学んだ足し算と引き算を用いて明確に与えられる。続いて，正負の数に対する加法・乗法に関する演算法則（結合法則，交換法則，分配法則）が登場する。例えば，加法の結合法則とは，

$(\bigcirc + \square) + \triangle = \bigcirc + (\square + \triangle)$

がいつでも成り立つということである。また，乗法の交換法則は，

$\bigcirc \times \square = \square \times \bigcirc$

が，分配法則は，

$\bigcirc \times (\square + \triangle) = \bigcirc \times \square + \bigcirc \times \triangle$

がいつでも成り立つということである。

0 以上の数に対するこれらの演算法則は，感覚的にも分かり易く小学校算数において十分経験していると思われる。それに比べて，正負の数に対する演算法則は，少ない実例の後，直ちに一般に成り立つものとして記述される。そこで，大学 3 年生以上を対象とするある授業で次の質問をしてみた：

「正負の数に対する演算法則を確かめたり証明したことはありますか？」

もちろん，0 以上の数に対する四則演算（特に，加法と乗法）に関する演算法則は既知として仮定してよい。これまで何度かこのような質問したところ，過去に演算法則の成立を確かめたという学生は（ほとんど）いなかった。

本稿では，こうした状況を踏まえて，負の数の導入の仕方と演算の定義，および加法の結合法則を中心とした演算法則を振り返ると共に，著者による大学での授業実践に基づいて正負の数に対する演算法則の成立を確認（証明）していく。

以下では，自然数（正の整数）の全体を $\mathbb{N}$, 整数の全体を $\mathbb{Z}$, 有理数の全体を $\mathbb{Q}$, 実数の全体を $\mathbb{R}$, 複素数の全体を $\mathbb{C}$ で表す。

*　宮城教育大学数学教育講座

また，本稿を通じて，$\mathbb{P}$ を正の数全体（正の整数全体（すなわち自然数全体 $\mathbb{N}$），正の有理数全体，あるいは正の実数全体）を表すものとし，さらに，0 以上の数の全体を $\mathbb{S}$（すなわち，$\mathbb{S} := \mathbb{P} \cup \{0\}$）とする。ただし，$0 \notin \mathbb{P}$ であり，$x \in \mathbb{P}$ に対して，

$$x + 0 = 0 + x = x,\ 0 + 0 = 0,$$
$$x \times 0 = 0 \times x = 0,\ 0 \times 0 = 0$$

である。

また，通例にしたがい，かけ算の記号「×」の代わりに「・」を用いたり，文字式については記号自体がしばしば省略される（例えば，$2 \times 3 = 2 \cdot 3\ (= 6)$，$a \times b = a{\cdot}b = ab$ など）。

2　0 以上の数について

本節で紹介する正の数の全体 $\mathbb{P}$ または 0 以上の数の全体 $\mathbb{S}$ における加法と乗法に関する演算法則や大小関係の性質は，先に触れた授業でも既知のものとして扱った内容であるが [1]，本学の初等教育教員養成課程の授業 [2] で扱う内容でもあるため，多少の説明と幾つかの関連する問を与える。

演算法則　$a, b, c \in \mathbb{P}$ とする。

(A0)（加法）$a, b \in \mathbb{P}$ に対して，
$a + b \in \mathbb{P}$ が定まっている。ただし，
$a + b \neq a$，$a + b \neq b$ である。

(A1)（加法の結合法則）
$(a + b) + c = a + (b + c)$

(A2)（加法の交換法則）$a + b = b + a$

(A3)（加法の簡約法則）
$c + a = c + b$ ならば $a = b$
$a + c = b + c$ ならば $a = b$

(M0)（乗法）$a, b \in \mathbb{P}$ に対して，
$ab \in \mathbb{P}$ が定まっている。

(M1)（乗法の結合法則）$(ab)c = a(bc)$

(M2)（乗法の交換法則）$ab = ba$

(M3)（乗法の簡約法則）
$ca = cb$ ならば $a = b$
$ac = bc$ ならば $a = b$

(M4)（乗法の単位元）$1 \in \mathbb{P}$ であり，
$1{\cdot}a = a{\cdot}1 = a$

(D)（分配法則）
$a(b + c) = ab + ac$
$(a + b)c = ac + bc$

なお，乗法の簡約法則（M3）の仮定において $c \neq 0$ を付け加えれば，これらの演算法則は $\mathbb{S}$ 上でも成り立つ（（A0）のただし書きでは $a \neq 0$，$b \neq 0$ とする）。

小学校算数の教科書では，これらの演算法則は，幾つかの具体的な例を示したあとでまとめとして述べられている。単なる計算例ではなく，左辺と右辺のどちらの計算にも意味がある具体的な場面設定をするなどの工夫がなされている（例えば [5]）。

大小関係

$x, y \in \mathbb{S}$ に対して，y は x 以上または x は y 以下であるとは，ある $z \in \mathbb{S}$ について $y = x + z$ が成り立つときをいい，$x \leq y$ または $y \geq x$ と表す。特に，$z \in \mathbb{P}$ について $y = x + z$ ならば，y は x より大きいまたは x は y より小さいといい，$x < y$ または $y > x$ と表す。大小関係については以下の性質が成り立つ：$x, y, z \in \mathbb{S}$ とする。

（反射律）　$x \leq x$
（反対称律）$x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$
（推移律）　$x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$

すなわち，大小関係 $\leq$ は $\mathbb{S}$ 上の半順序関係である。

（加法との両立性）
$x \leq y$ ならば $x + z \leq y + z$
（乗法との両立性）
$x \leq y$ ならば $xz \leq yz$

これらの性質は上述の演算法則からしたがう。さらに，次も成り立つ：

（比較可能性）$x, y \in \mathbb{S}$ ならば「$x < y$，$x = y$，$y < x$」のいずれか 1 つが成り立つ。すなわち，大小関係 $\leq$ は $\mathbb{S}$ 上の全順序関係である。

問 2.1　$\mathbb{S}$ 上の大小関係 $\leq$ について，反対称律，推移律，加法との両立性とその逆，および乗法との両立性が成り立つことを，$\mathbb{S}$ 上の演算法則を用いて確認

[1] $\mathbb{P} = \mathbb{N}$ の場合は，ペアノの公理から始めて，（数学的帰納法を用いて）これらの性質を証明することもできる（砂田 [23] 参照）。

[2] 通称「小専数学」。主に小学校教員を目指す学生向けの数学の授業。

せよ。また，大小関係 $\leq$ が $\mathbb{S}$ 上の全順序関係であること（すなわち比較可能性）を認めて，乗法との両立性の逆（$z \in \mathbb{P}$ に対して，$xz \leq yz$ ならば $x \leq y$）が成り立つことを確かめよ。

差と減法

$x \leq y$ なる $x, y \in \mathbb{S}$ に対して，$y = x + z$ を満たす $z \in \mathbb{S}$ は，加法の簡約法則 (A3) により一意的に定まる。よって，$x \leq y$ のとき $y = x + z$ となる $z \in \mathbb{S}$ を $z = y - x$ と表し，y と x の差といい，$x, y \in \mathbb{S}$, $x \leq y$ に対して，$y - x \in \mathbb{S}$ を対応させる対応を $\mathbb{S}$ 上の減法という。定義より，$x \leq y$ なる $x, y \in \mathbb{S}$ に対して，$y - x \in \mathbb{S}$ であり，かつ

$$y = x + (y - x) \tag{1}$$

が成り立ち，加法の交換法則 (A2) より，

$$y = (y - x) + x \tag{2}$$

も成り立つ。このことから，特に定義より，$x \leq y$ のとき $y - x \leq y$ であって，

$$y - (y - x) = x \tag{3}$$

であることがわかる。

減法について次の補題が成り立つ：

補題 2.2 $x, y, z \in \mathbb{S}$ とする。

(I) $y \geq z$ のとき，$x + y \geq y \geq z$ であり，

$$x + (y - z) = (x + y) - z \tag{4}$$

が成り立つ。

(II) $x \geq y$ かつ $x - y \geq z$ のとき，
$x \geq y + z \geq y$ であり，

$$(x - y) - z = x - (y + z) \tag{5}$$

が成り立つ。

(III) $y \geq z$ かつ $x \geq y - z$ のとき，
$x + z \geq y \geq z$ であり，

$$x - (y - z) = (x + z) - y \tag{6}$$

が成り立つ。

補題 2.2 の証明　(III) のみを示す。まず $y \geq z$ より，$y = (y - z) + z$ である。さらに，$x \geq y - z \geq 0$ のとき，$x + z \geq y$ であり，

$$\begin{aligned} &\{x - (y - z)\} + y \\ &\quad = \{x - (y - z)\} + \{(y - z) + z\} \\ &\quad = \{(x - (y - z)) + (y - z)\} + z \\ &\quad = x + z = \{(x + z) - y\} + y \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって，加法の簡約法則（A3）より，

$$x - (y - z) = (x + z) - y$$

が示される。 □

問 2.3 $x, y, z, w \in \mathbb{S}$ に対して，次が成り立つことを示せ：

(1) $x \leq y$ かつ $z \leq w$ ならば $x + z \leq y + w$ であり，
$(y + w) - (x + z) = (y - x) + (w - z)$

(2) $x \leq y \leq z \leq w$ ならば $z - y \leq w - x$ であり，
$(w - x) - (z - y) = (w + y) - (z + x)$

(3) $x \leq y$ かつ $z \leq w$ ならば $xz \leq yw$ であり，
$yw - xz = (y - x)w + x(w - z)$

(4) $x \leq y$ かつ $z \leq w$ ならば
$xw + yz \leq xz + yw$ であり，
$(y - x)(w - z) = (xz + yw) - (xw + yz)$

ヒント 示したい等式の両辺に共通の数を加えた等式を，演算法則を用いて示して，加法の簡約法則（A3）を用いるとよい。

3　負の数の導入

符号のついた数として負の数が導入されるが，その例としては，温度（温度計）や気温，標高や水深，収入と支出や利益と損失，株式市況，ゴルフのスコアなどスポーツにおける得点差，など，日常に現れる例があげられている。その後，負の数を含めた数直線，数の大小，絶対値について学び [3]，負の数を含めた数に対する四則演算（加法，減法，乗法，除

[3] これらの順序は教科書によって違う。例えば，[12, 6] では，「数直線 → 数の大小 → 絶対値」の順であるが，[13] では，「数直線 → 絶対値 → 数の大小」となっている。

法）につながっていく。これまでどおり，$\mathbb{P}$ を正の数全体，$\mathbb{S} := \mathbb{P} \cup \{0\}$ とする。

$\mathbb{P}$ の元に ± の符号をつけたものの全体をそれぞれ

$$+\mathbb{P} := \{+x \mid x \in \mathbb{P}\},\ -\mathbb{P} := \{-x \mid x \in \mathbb{P}\}$$

とおき，$+\mathbb{P}$ の元を正の数，$-\mathbb{P}$ の元を負の数と呼ぶ. 符号のついた数の全体を

$$\mathbb{A} := (-\mathbb{P}) \cup \{0\} \cup (+\mathbb{P})\ \text{（非交和）}$$

とおいて，$\mathbb{A}$ 上の演算と演算法則について考察する。ただし，$x, y \in \mathbb{P}$ に対して，

$$+x = +y \ \Leftrightarrow\ x = y \ \Leftrightarrow\ -x = -y$$

である。また，0 については，便宜上，$+0 = -0 = 0$ と約束し，$\alpha \in +\mathbb{P}$ であることを通常と同様に $\alpha > 0$，$\alpha \in -\mathbb{P}$ であることを $\alpha < 0$ と表す。

特に，$\mathbb{P} = \mathbb{N}$ の場合は，

$$\begin{aligned} +\mathbb{N} &= \{+1, +2, \ldots\},\ -\mathbb{N} = \{-1, -2, \ldots\}, \\ \mathbb{A} &= (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup (+\mathbb{N}) \\ &= \{\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\} = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

である。

さらに，$\alpha = \pm a \in \mathbb{A}$（$a \in \mathbb{S}$）の絶対値 $|\alpha|$ は

$$|\alpha| = a \in \mathbb{S}$$

によって定められる。数直線上では，α の絶対値は原点と点 α の距離として説明される。

4　加法について

正負の数の足し算（加法）は，これまで日常に現れる例を通じていろいろな方法で導入されてきた。時代や教科書によって様々であるが，以下のような説明場面がみられる：

- ゲームの得点 [22, 10]
- 「加える」「引く」の意味解釈 [3]
- 温度の変化 [22, 9, 20]
- 黒字と赤字 [9]
- 給水用タンクの水位の変化 [12]
- はしご上の移動 [22]
- 道路や数直線上の移動 [2, 20, 21, 13, 6]

例えば，[10] では，負の数は中学校 2 年の前半の第 2 単元「正の数・負の数」の「II 寄せ算と引き算」において，いろいろな例が示されたのち,「寄せ算の規則」として，次のようにまとめられている：

「同符号の数を加えるには，各数の絶対値を加え，共通の符号をつければよい。」
「異符号の 2 つの数を加えるには，両数の絶対値の差を求め，これに絶対値の大きい方の符号をつければよい。両数の絶対値が等しいならば，和は 0 になる。」
「符号のついた数に 0 を加えても，0 に符号のついた数を加えても 0 による影響はない。」

現行の教科書 [6] では，東西に伸びる直線状の道路（数直線）上の移動によって説明されている。

式で表すと，$\mathbb{A}$ における加法は次で与えられる：

定義 4.1　（加法）$\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ に対して，$\alpha + \beta \in \mathbb{A}$ を次で定める：

$$\alpha + \beta := \begin{cases} +(|\alpha| + |\beta|) & \text{(i) } \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \text{ のとき} \\ +(|\alpha| - |\beta|) & \text{(ii) } \alpha \geq 0, \beta \leq 0 \text{ かつ} \\ & \qquad |\alpha| \geq |\beta| \text{ のとき} \\ -(|\beta| - |\alpha|) & \text{(iii) } \alpha \geq 0, \beta \leq 0 \text{ かつ} \\ & \qquad |\beta| \geq |\alpha| \text{ のとき} \\ -(|\alpha| - |\beta|) & \text{(iv) } \alpha \leq 0, \beta \geq 0 \text{ かつ} \\ & \qquad |\alpha| \geq |\beta| \text{ のとき} \\ +(|\beta| - |\alpha|) & \text{(v) } \alpha \leq 0, \beta \geq 0 \text{ かつ} \\ & \qquad |\beta| \geq |\alpha| \text{ のとき} \\ -(|\alpha| + |\beta|) & \text{(vi) } \alpha \leq 0, \beta \leq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

（ただし $\pm 0 = 0 = |0|$ である。）

正負の数に対する加法は，α，β，$\alpha + \beta$ の符号により完全に場合分けされる：

α	β	$\alpha + \beta$	計算結果	場合分け
+	+	+	$+(\lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert)$	(i)
+	−	+	$+(\lvert\alpha\rvert - \lvert\beta\rvert)$	(ii)
+	−	−	$-(\lvert\beta\rvert - \lvert\alpha\rvert)$	(iii)
−	+	+	$+(\lvert\beta\rvert - \lvert\alpha\rvert)$	(v)
−	+	−	$-(\lvert\alpha\rvert - \lvert\beta\rvert)$	(iv)
−	−	−	$-(\lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert)$	(vi)

定理 4.2（加法の結合法則）$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{A}$ に対して，次が成り立つ：

$$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma) \tag{7}$$

証明 まず，α, β, γ の中に 0 が含まれる場合は 0 の性質より容易に確かめられるので，以下，$\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ と仮定する。このとき，上の式 (7) の左辺と右辺を，それぞれ以下の表のように，現れる数の符号によって場合分けして，同じアルファベットの大文字と小文字の各場合について，等式が成り立つことを確認していけばよい。

α	β	γ	$\alpha+\beta$	$(\alpha+\beta)+\gamma$	
+	+	+	+	+	(A)
+	+	−	+	+	(B1)
				−	(B2)
+	−	+	+	+	(C1)
			−	+	(C2)
				−	(C3)
−	+	+	+	+	(D1)
			−	+	(D2)
				−	(D3)
+	−	−	+	+	(E1)
				−	(E2)
			−	−	(E3)
−	+	−	+	+	(F1)
				−	(F2)
			−	−	(F3)
−	−	+	−	+	(G1)
				−	(G2)
−	−	−	−	−	(H)

α	β	γ	$\beta+\gamma$	$\alpha+(\beta+\gamma)$	
+	+	+	+	+	(a)
+	+	−	+	+	(b1)
			−	+	(b2)
				−	(b3)
+	−	+	+	+	(c1)
			−	+	(c2)
				−	(c3)
−	+	+	+	+	(d1)
				−	(d2)
+	−	−	−	+	(e1)
				−	(e2)
−	+	−	+	+	(f1)
				−	(f2)
			−	−	(f3)
−	−	+	+	+	(g1)
				−	(g2)
			−	−	(g3)
−	−	−	−	−	(h)

<u>（A）と（a）の場合</u>（$\alpha, \beta, \gamma > 0$）：
$\alpha = +|\alpha|,\ \beta = +|\beta|,\ \gamma = +|\gamma|$ であるから，

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+\gamma &= (+(|\alpha|+|\beta|))+(+|\gamma|)\\ &= +\{(|\alpha|+|\beta|)+|\gamma|\}\\ &= +\{|\alpha|+(|\beta|+|\gamma|)\}\\ &= \alpha+(\beta+\gamma)\end{aligned}$$

がわかる。同様にして,（H）と（h）の場合も確かめられる。

<u>（B）と（b）の場合</u>（$\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$）：
$\alpha = +|\alpha|,\ \beta = +|\beta|,\ \gamma = -|\gamma|$ より，

$$\alpha+\beta = +(|\alpha|+|\beta|),\ \gamma = -|\gamma|$$

である。

（B1）について：$(\alpha+\beta)+\gamma \geq 0$ より，

$$|\alpha|+|\beta| \geq |\gamma| \tag{8}$$

であり，このとき，

$$(\alpha+\beta)+\gamma=+\{(|\alpha|+|\beta|)-|\gamma|\} \tag{9}$$

である。

（B2）について：$(\alpha+\beta)+\gamma\leq 0$ より，

$$|\gamma|\geq|\alpha|+|\beta| \tag{10}$$

であり，

$$(\alpha+\beta)+\gamma=-\{|\gamma|-(|\alpha|+|\beta|)\} \tag{11}$$

である。

（b1）について：$\beta+\gamma\geq 0$ より，

$$|\beta|\geq|\gamma| \tag{12}$$

であり，$\alpha>0$ なので，

$$\begin{aligned}&\alpha+(\beta+\gamma)\\ &\quad= +\{|\alpha|+(|\beta|-|\gamma|)\}\end{aligned} \tag{13}$$

である。

（b2）について：$\beta+\gamma\leq 0$ かつ $\alpha+(\beta+\gamma)\geq 0$ より，

$$|\gamma|\geq|\beta| \text{ かつ } |\alpha|\geq|\gamma|-|\beta| \tag{14}$$

であり，

$$\alpha+(\beta+\gamma)=+\{|\alpha|-(|\gamma|-|\beta|)\} \tag{15}$$

である。

（b3）について：$\beta+\gamma\leq 0$ かつ $\alpha+(\beta+\gamma)\leq 0$ より，

$$|\gamma|\geq|\beta| \text{ かつ } |\gamma|-|\beta|\geq|\alpha| \tag{16}$$

であり，

$$\alpha+(\beta+\gamma)=-\{(|\gamma|-|\beta|)-|\alpha|\} \tag{17}$$

である。

ここで，(7) の両辺が 0 以上となるのは，（B1）および（b1），（b2）である。

（b1）のとき，(12) より

$$|\gamma|\leq|\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$$

であり，このとき，補題 2.2 の（I）より

$$\begin{aligned}\alpha+(\beta+\gamma) &= +\{|\alpha|+(|\beta|-|\gamma|)\}\\ &= +\{(|\alpha|+|\beta|)-|\gamma|\}\\ &= (\alpha+\beta)+\gamma\end{aligned} \tag{18}$$

がしたがう。

（b2）のときは，(14)，すなわち

$$|\alpha|\geq|\gamma|-|\beta|\geq 0$$

より

$$|\alpha|+|\beta|\geq|\gamma|$$

であり，補題 2.2 の（III）より，

$$\begin{aligned}\alpha+(\beta+\gamma) &= +\{|\alpha|-(|\gamma|-|\beta|)\}\\ &= +\{(|\alpha|+|\beta|)-|\gamma|\}\\ &= (\alpha+\beta)+\gamma\end{aligned} \tag{19}$$

を得る。

(7) の両辺が 0 以下となるのは，（B2）と（b3）である。

（b3）のとき，(16)，すなわち

$$|\gamma|-|\beta|\geq|\alpha|>0$$

より

$$|\gamma|\geq|\alpha|+|\beta|>|\beta|$$

となり（B2）に含まれ，逆に（B2）のときは（b3）に含まれる。このとき，補題 2.2 の（II）より，

$$\begin{aligned}\alpha+(\beta+\gamma) &= -\{(|\gamma|-|\beta|)-|\alpha|\}\\ &= -\{|\gamma|-(|\alpha|+|\beta|)\}\\ &= (\alpha+\beta)+\gamma\end{aligned} \tag{20}$$

がしたがう。

<u>（C）と（c）の場合</u>（$\alpha,\gamma>0,\beta<0$）：
$\alpha=+|\alpha|$，$\beta=-|\beta|$，$\gamma=+|\gamma|$ である。

（C1）について：$\alpha+\beta\geq 0$ より，

$$|\alpha|\geq|\beta| \tag{21}$$

であるから，

$$(\alpha+\beta)+\gamma=+\{(|\alpha|-|\beta|)+|\gamma|\} \tag{22}$$

である。

（C2）について：$\alpha+\beta\leq 0$，$(\alpha+\beta)+\gamma\geq 0$ より

$$|\beta|\geq|\alpha|,\ |\gamma|\geq|\beta|-|\alpha| \tag{23}$$

であるから，

$$(\alpha+\beta)+\gamma=+\{|\gamma|-(|\beta|-|\alpha|)\} \tag{24}$$

である。

（C3）について：$\alpha+\beta\leq 0$，$(\alpha+\beta)+\gamma\leq 0$ より

$$|\beta|\geq|\alpha|,\ |\beta|-|\alpha|\geq|\gamma| \tag{25}$$

であるから，

$$(\alpha+\beta)+\gamma=-\{(|\beta|-|\alpha|)-|\gamma|\} \tag{26}$$

である。

（c1）について：$\beta+\gamma\geq 0$ より

$$|\gamma|\geq|\beta| \tag{27}$$

であるから，

$$\alpha+(\beta+\gamma)=+\{|\alpha|+(|\gamma|-|\beta|)\} \tag{28}$$

である。

（c2）について：$\beta+\gamma\leq 0$，$\alpha+(\beta+\gamma)\geq 0$ より，

$$|\beta|\geq|\gamma|,\ |\alpha|\geq|\beta|-|\gamma| \tag{29}$$

であるから，

$$\alpha+(\beta+\gamma)=+\{|\alpha|-(|\beta|-|\gamma|)\} \tag{30}$$

である。

（c3）について：$\beta+\gamma\leq 0$，$\alpha+(\beta+\gamma)\leq 0$ より，

$$|\beta|\geq|\gamma|,\ |\beta|-|\gamma|\geq|\alpha| \tag{31}$$

であるから，

$$\alpha+(\beta+\gamma)=-\{(|\beta|-|\gamma|)-|\alpha|\} \tag{32}$$

が成り立つ。

以上から,（C）と（c）の場合について，等式 (7) が成り立つことを，補題 2.2 の（I）,（II）,（III）を用いて，先と同様に，確認することができる。

「（A）と（a）」,「（B）と（b）」,「（C）と（c）」の場合と同様にして，他の場合についても (7) が成り立つことが確かめられる。 □

$\mathbb{A}$ における加法の交換法則は定義より直ちにしたがう。すなわち，

定理 4.3 （加法の交換法則）$\alpha,\beta\in\mathbb{A}$ に対して，次が成り立つ：

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \tag{33}$$

注 4.4 群の公理にも現れるように，結合法則は基本的であるため，上記では，$\mathbb{A}$ における他の演算法則を前提とせずに加法の結合法則 (7) を証明した。

交換法則 (33) を用いると，例えば（C）と（c）の場合 $(\alpha,\gamma>0,\beta<0)$ について,（B）と（b）の場合から次のようにして確かめられる：

$$\begin{aligned}
&(\alpha+\beta)+\gamma\\
&\quad=\quad \gamma+(\alpha+\beta)\quad [\text{交換法則}]\\
&\quad=\quad (\gamma+\alpha)+\beta\\
&\qquad\quad [(\text{B})\text{と}(\text{b})\text{における結合法則}]\\
&\quad=\quad (\alpha+\gamma)+\beta\quad [\text{交換法則}]\\
&\quad=\quad \alpha+(\gamma+\beta)\\
&\qquad\quad [(\text{B})\text{と}(\text{b})\text{における結合法則}]\\
&\quad=\quad \alpha+(\beta+\gamma)\quad [\text{交換法則}]
\end{aligned}$$

問 4.5 残された場合「（D）と (d)」,「（E）と（e）」,「（F）と（f）」,「（G）と（g）」についても (7) が成り立つことを直接あるいは交換法則を用いて確かめよ。

5 乗法について

正負の数の乗法（かけ算）についても様々な例で説明されてきている。[8] では,「正負の数の乗法の意味と演算法の指導法（なぜマイナス × マイナスはプラスなのか）」において，現行の教科書や参考書にある代表的な指導法として次の 3 つのタイプをあげている：

1. 東西の移動と時間を用いた指導法
2. 外挿による指導法
3. 既知の計算方法から導く指導法

例えば，正負の数の加法（たし算）を既知として，正の整数倍の意味を累加として捉えれば

$$(+2)\times 3=(+2)+(+2)+(+2)=+6$$

より，$(+2)\times(+3)=+6=+(2\times 3)$ と表される。次に，負の数 × 正の数であるが，やはり累加と考えると

$$\begin{aligned}
(-2)\times 3 &= (-2)+(-2)+(-2)=-6\\
&= -(2\times 3)
\end{aligned}$$

と捉えられ，$(-2)\times(+3)=-6=-(2\times 3)$ と表される。このことから，負の数と正の数の積が絶対値の積に負の符号をつけた数であることを述べてい

る。ここまでは,「3. 既知の計算方法から導く指導法」に当てはまる。続いて，正の数 × 負の数について，正の数 × 正の数から以下のように乗数を 1 ずつ減らすと，

$$\begin{array}{ccccc} (+2) & \times & (+3) & = & +6 \\ (+2) & \times & (+2) & = & +4 \\ (+2) & \times & (+1) & = & +2 \\ (+2) & \times & 0 & = & 0 \\ (+2) & \times & (-1) & = & \\ (+2) & \times & (-2) & = & \end{array}$$

となり，積は 2 ずつ小さくなっていくことから，

$$(+2) \times (-1) = -2,\ (+2) \times (-2) = -4$$

のような計算を推測させ，さらに，負の数 × 負の数では，

$$\begin{array}{ccccc} (-2) & \times & (+3) & = & -6 \\ (-2) & \times & (+2) & = & -4 \\ (-2) & \times & (+1) & = & -2 \\ (-2) & \times & 0 & = & 0 \\ (-2) & \times & (-1) & = & \\ (-2) & \times & (-2) & = & \end{array}$$

では，乗数を 1 ずつ小さくしていくと，積は 2 ずつ大きくなっていくことから，

$$(-2) \times (-1) = +2,\ (-2) \times (-2) = +4$$

と推測させる方法がある [22, 20, 18]。この部分は「2. 外挿による指導法」に含まれ，最近の [18] では，これらの説明にあわせて対応する数直線上の移動も記載している。

負の数の正の整数倍については上述した累加によって導入を行い，正の数の負の整数倍については交換法則から説明しているものもある [3]。

他には，気球に砂袋（１袋で 5g 重くなる）と水素袋（１袋で 3g 軽くなる）の積みおろしによる説明 [22] や，進む時計と遅れる時計による説明 [9]，給水用タンクの水位の変化（単位時間あたりの給水量と水位変化）による説明 [10, 12]，道路上の移動（速さ × 時間 = 距離）による説明 [14, 13, 6, 7] などがあり，最近はこれらに類似するものを組み合わせた記述が見られる。なお，[15] では，負の数の演算が第三学年で扱われていたこともあり，演算法則に基づいて説明させる問が置かれている。

正負の数の乗法について以下のようにまとめられる [6]：

<u>正負の数の乗法</u>
２つの数の積を求めるには，次のようにする。
同符号の数では，絶対値の積に正の符号をつける。
異符号の数では，絶対値の積に負の符号をつける。

加法と同様に式で表すと以下のとおりである：

定義 5.1 （乗法）$\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ に対して，積 $\alpha\beta \in \mathbb{A}$ を次で定める：

$$\alpha\beta := \begin{cases} +|\alpha||\beta| & \alpha, \beta \geq 0 \text{ のとき} \\ -|\alpha||\beta| & \alpha \geq 0, \beta \leq 0 \text{ のとき} \\ -|\alpha||\beta| & \alpha \leq 0, \beta \geq 0 \text{ のとき} \\ +|\alpha||\beta| & \alpha, \beta \leq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

すなわち，正負の数の積は 2 数の符号により次の表で与えられる：

$\alpha \backslash \beta$	$+$	$-$
$+$	$+\|\alpha\|\|\beta\|$	$-\|\alpha\|\|\beta\|$
$-$	$-\|\alpha\|\|\beta\|$	$+\|\alpha\|\|\beta\|$

定理 5.2 （乗法の結合法則）$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{A}$ に対して，次が成り立つ：

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \tag{34}$$

定理 5.3 （乗法の交換法則）$\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ に対して，次が成り立つ：

$$\alpha\beta = \beta\alpha \tag{35}$$

定理 5.4 （分配法則）$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{A}$ に対して，次が成り立つ：

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \tag{36}$$

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \tag{37}$$

正負の数に対する乗法の交換法則は定義から明らかである。乗法の結合法則については，絶対値に対しては成り立つので，符号に注意すれば容易にわかる。分配法則については，加法の結合法則に比べると場合分けが少ないので，直接確かめることもできる。

問 5.5 分配法則 (36) を，α, β, γ, $\beta + \gamma$, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta + \alpha\gamma$ の符号に応じて場合分けを行うことにより直接確かめよ。

注 5.6 中学校の教科書では見かけないが，[8] において「形式不易の原理」と呼ばれる性質「正負の数の積に対して自然数同様の演算法則が成り立つ」から，発見的考察によって正負の数の乗法を導入する方法がある（ただし正負の数および 0 の加法の性質については既知とする）。具体例で述べると，$\alpha \in \mathbb{A}$ に対して，その符号を変えたものを $-\alpha$ と表し（例えば $\alpha = +3$ であれば $-\alpha = -3$ であり，$\alpha = -3$ なら $-\alpha = +3$ である），0 の性質を認めると

$$\begin{aligned} \alpha + 0 = 0 + \alpha &= \alpha, \\ \alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ [4]。ここで，分配法則を仮定して，$0 = 0{+}0$ の両辺に右から β をかけると，

$$0{\cdot}\beta = (0+0){\cdot}\beta = 0{\cdot}\beta + 0{\cdot}\beta$$

となる。さらに，$0{\cdot}\beta$ の加法に関する逆元 $-0{\cdot}\beta$ を辺々に（右から）加えて，加法の結合法則を仮定すれば，

$$\begin{aligned} 0 &= 0{\cdot}\beta + (-0{\cdot}\beta) \\ &= (0{\cdot}\beta + 0{\cdot}\beta) + (-0{\cdot}\beta) \\ &= 0{\cdot}\beta + \{0{\cdot}\beta + (-0{\cdot}\beta)\} \\ &= 0{\cdot}\beta + 0 = 0{\cdot}\beta \end{aligned}$$

を得る。したがって，$0{\cdot}\beta = 0$ と定義すべきであることがわかる。同様にして（あるいは乗法の交換法則を仮定して），$\alpha{\cdot}0 = 0$ と定義すべきであることも導かれる。

次に，$\alpha + (-\alpha) = 0$ の両辺に β をかけると，分配法則より，

$$\begin{aligned} 0 &= 0{\cdot}\beta = \{\alpha + (-\alpha)\}\beta \\ &= \alpha\beta + (-\alpha)\beta \end{aligned}$$

であるから，$\alpha\beta$ の加法に関する逆元 $-\alpha\beta$ を（左から）加えると，加法の結合法則より，

$$\begin{aligned} -\alpha\beta &= (-\alpha\beta) + 0 \\ &= (-\alpha\beta) + \{\alpha\beta + (-\alpha)\beta\} \\ &= \{(-\alpha\beta) + \alpha\beta\} + (-\alpha)\beta \\ &= 0 + (-\alpha)\beta = (-\alpha)\beta \end{aligned}$$

が成り立つ。例えば，$\alpha = +2$，$\beta = +3$ とすれば，

$$-(2 \times 3) = (-2) \times (+3)$$

を得る。同様にして，$\beta + (-\beta) = 0$ の両辺に $-\alpha$ をかけると，

$$0 = (-\alpha)\beta + (-\alpha)(-\beta)$$

となるが，$(-\alpha)\beta = -\alpha\beta$ より，

$$0 = -\alpha\beta + (-\alpha)(-\beta)$$

がしたがう。両辺に $\alpha\beta$ を加えると

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \alpha\beta + \{-\alpha\beta + (-\alpha)(-\beta)\} \\ &= \{\alpha\beta + (-\alpha\beta)\} + (-\alpha)(-\beta) \\ &= 0 + (-\alpha)(-\beta) = (-\alpha)(-\beta) \end{aligned}$$

を得る。例えばこれから $\alpha = +2$，$\beta = +3$ とすれば、

$$(+2) \times (+3) = (-2) \times (-3)$$

を得る。このことからも正負の数に対する乗法の定義が導かれる。

ただし，このように定めた乗法は，演算法則が成り立つための必要条件（の一部）から発見的考察によって導かれたものなので，実際に演算法則を満たすかどうか（すなわち十分性）については，改めて確認する必要があることに注意する。

6 別証明について

本節では，前節までに述べた演算法則の別証明を与える。キーワードは，大学数学で学ぶ基本事項である「同値関係」と「well-defined 性（定義の無矛盾性）」である（[19] 参照）。

命題 6.1 $\widetilde{A} = \mathbb{S} \times \mathbb{S} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{S}\}$ とし，$\widetilde{A}$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める：$(x, y), (x', y') \in \widetilde{A}$ に対して，

$$(x, y) \sim (x', y') \;\Leftrightarrow\; x + y' = y + x' \tag{38}$$

とし，商集合 $\widetilde{A}/\sim$ を A と表し [5]，$(a, b) \in \widetilde{A}$ の同値類を $[a, b] \in A$ と表す。A 上の加法 $+$ と乗法 $\cdot$ を次で定める：$[a, b], [c, d] \in A$ に対して，

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &:= [a + c, b + d], \\ [a, b]{\cdot}[c, d] &:= [ac + bd, ad + bc] \end{aligned}$$

[4] [8] ではこの性質も「形式不易の原理」から導いている。

[5] この A を $\mathbb{S}$ の K 群といい，$K(\mathbb{S})$ と表される [1]。

このとき，A 上の加法 $+$ と乗法 $\cdot$ は well-defined である。すなわち，$[a,b]=[a',b']$, $[c,d]=[c',d']$ ならば，

$$
\begin{aligned}
&[a+c,b+d]=[a'+c',b'+d'] \\
&(\quad \Leftrightarrow \quad [a,b]+[c,d]=[a',b']+[c',d'] \quad), \\
&[ac+bd,ad+bc]=[a'c'+b'd',a'd'+b'c'] \\
&(\quad \Leftrightarrow \quad [a,b]\cdot[c,d]=[a',b']\cdot[c',d'] \quad)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

問 6.2 上記命題において，$\sim$ が $\widetilde{A}$ 上の同値関係であることを示し，A 上の加法と乗法が well-defined であることを確かめよ。

注 6.3 $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ の代わりに，$\mathbb{P}\times\mathbb{P}$ を用いても，$\widetilde{A}$ と $A=\widetilde{A}/\sim$ が構成される [6]。例えば，$[a,b]$ と $[c,d]$ の積 $[a,b]\cdot[c,d]$ は，“$a-b$” と “$c-d$” の素朴な積 “$(a-b)(c-d)=(ac+bd)-(ad+bc)$” に対応するはずという発見的考察に基づいて定義されたものである。

なお，正負の数が正の数（または 0 以上の数）のペアとして捉えれらることは，２数の組が小学校で学習する「てんびん」の状態に対応している考えると分かり易い。ただし,「てんびん」の両側に同じだけ「おもり」をのせても計れるおもさは同じなのでこれらは同じ状態と考える（以下の問参照)。

問 6.4 先の命題において，$(a,b),(a',b')\in\widetilde{A}$ に対して，次が同値であることを示せ：

・ $(a,b)\sim(a',b')$（すなわち $a+b'=b+a'$）。
・ ある $d\in\mathbb{S}$ について次が成り立つ：
　$(a',b')=(a+d,b+d)$ または
　$(a,b)=(a'+d,b'+d)$

A における演算法則を示すために次の補題を準備する：

補題 6.5 $(a,b),(c,d)\in\widetilde{A}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
(a,b)+(c,d) &:= (a+c,b+d) \\
(a,b)\cdot(c,d) &:= (ac+bd,ad+bc)
\end{aligned}
$$

と定める。このとき，$\widetilde{A}$ 上の加法と乗法は，結合法則，交換法則，分配法則を満たす。

[6] $\mathbb{P}=\mathbb{N}$ の場合に自然数 $\mathbb{N}$ から整数 $\mathbb{Z}$ を構成する方法が [23] にある。

補題 6.5 の証明 $\mathbb{S}$ の元を成分とする 2×2 行列の全体を $M_2(\mathbb{S})$ と表し，$\iota:\widetilde{A}\longrightarrow M_2(\mathbb{S})$ を

$$(a,b)\mapsto\iota(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

と定めると，ι は単射であり，かつ準同型，すなわち

$$
\begin{aligned}
\iota((a,b)+(c,d)) &= \iota(a,b)+\iota(c,d) \\
\iota((a,b)\cdot(c,d)) &= \iota(a,b)\iota(c,d)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。実際，

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば $\iota(a,b)=aE+bI$ と表され，

$$
\begin{aligned}
\iota(a,b)+\iota(c,d) &= (aE+bI)+(cE+dI) \\
&= (a+c)E+(b+d)I \\
&= \iota((a,b)+(c,d))
\end{aligned}
$$

であり，また，$E^2=I^2=E\ (I\neq\pm E)$，$IE=EI=I$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\iota(a,b)\iota(c,d) &= (aE+bI)(cE+dI) \\
&= (ac+bd)E+(ad+bc)I \\
&= \iota(ac+bd,ad+bc) \\
&= \iota((a,b)\cdot(c,d))
\end{aligned}
$$

である。ここで，$M_2(\mathbb{S})$ 上では，行列の和と積に関して，加法・乗法に関する結合法則と，加法の交換法則，および分配法則が成り立ち，さらに，ι の像 $\iota(\widetilde{A})$ においては，乗法の交換法則が成り立つ。よって，$\widetilde{A}$ 上の加法と乗法についてもこれらの演算法則が成り立つ。 □

定理 6.6 A における加法と乗法について，結合法則，交換法則，分配法則が成り立ち，A は環になる。

定理の証明 $\alpha=[a,b],\beta=[c,d],\gamma=[e,f]\in A$ に対して，$\widetilde{\alpha}=(a,b),\widetilde{\beta}=(c,d),\widetilde{\gamma}=(e,f)\in\widetilde{A}$ として，$\alpha=[\widetilde{\alpha}],\beta=[\widetilde{\beta}],\gamma=[\widetilde{\gamma}]$ と表すことにする。このとき，命題 6.1 により，$\widetilde{A}$ 上の同値関係 $\sim$ による商集合 A 上の加法と乗法は well-defined であるから，補題 6.5 により，例えば，次が確かめられる：

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)+\gamma &= [\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}]+[\widetilde{\gamma}] \\
&= [(\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta})+\widetilde{\gamma}] \\
&= [\widetilde{\alpha}+(\widetilde{\beta}+\widetilde{\gamma})] \\
&= \alpha+(\beta+\gamma)
\end{aligned}
$$

$$(\alpha\beta)\gamma = [\widetilde{\alpha}\cdot\widetilde{\beta}]\cdot[\widetilde{\gamma}] = [(\widetilde{\alpha}\cdot\widetilde{\beta})\cdot\widetilde{\gamma}] = [\widetilde{\alpha}\cdot(\widetilde{\beta}\cdot\widetilde{\gamma})] = \alpha(\beta\gamma)$$

$$\begin{aligned}\alpha(\beta+\gamma) &= [\widetilde{\alpha}]\cdot[\widetilde{\beta}+\widetilde{\gamma}] = [\widetilde{\alpha}(\widetilde{\beta}+\widetilde{\gamma})]\\ &= [\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}+\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}]\\ &= [\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}]+[\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}] = \alpha\beta+\alpha\gamma\end{aligned}$$

他のものについても同様である。

なお，A における加法の単位元（零元）は $0 = [0,0]$ であり，$\alpha = [a,b] \in A$ に対する逆元 $-\alpha$ は $-\alpha = [b,a] \in A$ で与えられる。また，乗法の単位元は $1 = [1,0]$ である。 □

系 6.7 $\mathbb{A}$ 上の加法と乗法に対して結合法則，交換法則，分配法則が成り立ち，$\mathbb{A}$ は環となる。

系の証明 $\varphi : \mathbb{A} \to A$ を次で定める：

$$\varphi(\alpha) := \begin{cases} [|\alpha|, 0] & \alpha > 0 \text{ のとき} \\ [0,0] & \alpha = 0 \text{ のとき} \\ [0, |\alpha|] & \alpha < 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{39}$$

このとき，φ は単射であり，$\varphi(0) = [0,0]$ は A の零元，$\varphi(+1) = [1,0]$ は A の乗法に関する単位元である。φ の準同型性，すなわち，$\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ に対して，

$$\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta), \tag{40}$$

$$\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta) \tag{41}$$

が成り立つことは容易に確かめられる。 □

問 6.8 上記の $\varphi : \mathbb{A} \to A$ について，(40) が成り立つことを示せ。

注 6.9 定理の証明の構造を振り返ると，一般に，（可換な）代数系 $\widetilde{A}$ とその上に与えられた同値関係 $\sim$ に関して，$\widetilde{A}$ 上の代数演算が商集合 $A = \widetilde{A}/\sim$ 上に落ちるとき，すなわち $\widetilde{A}$ 上の演算が A 上の well-defined な演算を定めるとき，$\widetilde{A}$ 上で成り立つ演算法則が A 上でも成り立つことが分かる。このことに注意すると，様々な代数系に対して演算法則が成り立つことが容易に分かるようになる。

例 6.10 （複素数体） 高等学校の数学 II，数学 III の教科書（例えば [24, 25]）では，複素数の積に関する結合法則や和と積に関する分配法則について，明示的には述べられていない。これらは定義から直接確かめられるが，次のように考えても了解される[7]。

まず，$\mathbb{C}$ を，

$$a+bi \mapsto a+bX \bmod X^2+1$$

によって，演算も込めて $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ と同一視する（i は虚数単位）。ここで，$\mathbb{R}[X]$ は X を不定元とする実数係数多項式環であり，(X^2+1) は多項式 X^2+1 が定めるイデアルである。$\mathbb{R}[X]$ における整式の足し算とかけ算について，結合法則，交換法則，分配法則が成り立つことから，$\mathbb{R}[X]$ をイデアル (X^2+1) で割って得られる $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ 上でこれらの演算法則が成り立つことが分かる。

あるいは，実数を成分とする 2×2 行列の全体を $M_2(\mathbb{R})$ として，$\mathbb{C}$ を

$$\mathbb{C} \ni a+bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

の像と演算も込めて同一視すれば，行列の和と積に対して成り立つ結合法則と分配法則がそのまま成り立ち，さらに積に関する交換法則も成り立つことが分かる。

問 6.11 $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ に対して，$\mathbb{Z}_5$ 上の加法と乗法を次の表で定める：

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

このとき，$\mathbb{Z}_5$ 上の加法 $+$ と乗法 $\times$ について，結合法則と分配法則が成り立つことを確かめよ。

7 おわりに

現行の中学校 1 年の数学の教科書 [6] では，第 1 章が「正負の数」となっており，[12, 13] では，第 1 章は「整数」，第 2 章が「正負の数」となっている。昭和 33 年（1958）10 月に告示された中学校学習指導要領 [17] では，「第 3 節 数学 第 2 各学年の目標および内容」の「第 1 学年 1 目標（1）」において，「整

[7] ここで述べた複素数体 $\mathbb{C}$ の捉え方については [19] 参照。

数，小数および分数を数として統一的にとらえさせ，その取扱に習熟させる。さらに数を正の数，負の数にまで拡張して，数の概念の理解を深め，これらの数を用いて数量を統一的に表現し，処理する能力を養う。」 とあるため，少なくともこれ以降は，中学校 1 年生において，正負の数を扱うことになっている。なお，[17] の「第 1 学年 2 内容 A 数」[8] では，「用語と記号」の中に，交換法則，結合法則，分配法則が明記されている。遡ると，中学校 2 年で負の数が扱われていた時代があり，実際，[16] では「正の数・負の数を用いて量を表わすことは，二年から指導される。」とある。

負の数を含めた四則演算については，全国学力・学習状況調査でも毎年関連する問題が出題されているが，演算法則に関する問題は出題されていない。加法・乗法に関する結合法則，交換法則および分配法則について，結果としては，小学校算数で習ったものがそのまま成り立つため，あまり問題になることもなかったのかもしれない。しかしながら，授業後の学生からの感想によれば，「言われてみれば，（演算法則の成立を）改めて確かめたことがなかった。」という主旨ものも多くみられた。また，感想の中には，中学生・高校生の中で本稿で取り上げたような疑問をもつ生徒がいることがうかがえるものがあった。そうした生徒に対して，教える側が自信を持って「成り立つ」,「やればできる」と言えるためには，「やればできるはず」のことを，実際に「きちんとやってみる」ことも大事であろう。一方，正負の数の演算法則を定義から直接確かめるのは意外と面倒なものであったが，6 節の別証明のように大学で数学を少し学んで問題を捉え直すと，（証明を全部書き下さなくても）見通しを持ってその成立を確信できるようになる。このような題材を大学の授業で取り上げることにより，学生が大学で数学を学ぶ動機付けの一助となることを期待している。

もちろん，中学生が初めて負の数を学習する時点では，このような演算法則をきっちり確かめる必要はないかもしれないが，文字式の使用に十分慣れた中学生・高校生に対して，こうした疑問を投げかけて，生徒の力で（協働して）解決させるという課題も面白いかもしれない。例えば，加法の結合法則なら，まず自然数に対する演算法則と正負の数に対する演算の定義を復習する。先の場合分け（A）～（H）と（a）～（h）のうち自明な場合（（A) と（a）や（H）と（h）の場合）と非自明な場合 1 つ（例えば（B）と（b）の場合）を例題として紹介した後に，残りの場合について，場合分けに応じて生徒のグループ分けを行い，各グループが担当する場合について，それぞれ加法の結合法則を確かめさせるという数学的活動が考えられよう。また，発展的な課題として，問 6.11 のような問題も考えられる。この場合も定義（演算表）から直接演算法則を確かめるのは，やればできる程度ではあるが，少し面倒である。この問についても，合同式と関連して，$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ を $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{[m] \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$（ただし $[m]$ は m の 5 を法とする合同による同値類）と演算も込めて同一視できることを示せば，$\mathbb{Z}$ 上で成り立つ演算法則（結合法則，分配法則）が $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 上でも成り立つことが直ちに了解される。ただし，そのためには $\mathbb{Z}$ 上の演算から定まる $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ の演算の well-defined 性を確かめる必要があるが，これは容易に確かめられる。

[8] 当時は，現在と異なり,「A 数」,「B 式」,「C 数量関係」,「D 計量」,「E 図形」の 5 領域があった。

参考文献

[1] M. F. Atiyah，K-theory，Addison-Wesley，1989.

[2] 青木利夫，河田龍夫，田島一郎，戸田 清，吉田洋一，中学校数学 二年，学校図書，1954 年.

[3] 青木利夫，河田龍夫，田島一郎，戸田 清，中学校数学 2 年 改訂版，1957 年.

[4] 藤井斉亮ほか，新編 あたらしい さんすう 1 上 さんすうだいすき !，東京書籍，2019 年.

[5] 藤井斉亮ほか，新編 新しい算数 2 上，東京書籍，2019 年.

[6] 藤井斉亮，俣野 博ほか，新しい数学 1，東京書籍，2019 年.

[7] 一松 信，岡田褘雄，町田彰一郎，池田敏和ほか，中学校 数学 1，学校図書，2019 年.

[8] 星野真樹，公理的手法を用いた負の数に対する演算の指導法，東北学院大学教養学部論集 第 178 号（2017），1–13.

[9] 彌永昌吉，三村征雄ほか，新しい数学　中学二年　下，東京書籍，1950 年.

[10] 弥永昌吉，三村征雄ほか，新しい数学　中学二年　上，東京書籍，1952 年.

[11] 彌永昌吉，三村征雄ほか，新編 新しい数学 2 年（見本版），東京書籍，1956 年.

[12] 小平邦彦ほか，改訂 新しい数学 1，東京書籍，1985 年.

[13] 小平邦彦ほか，新編 新しい数学 1，東京書籍，1987 年.

[14] 功力金二郎，曽田梅太郎，戸田 清ほか，中学校 数学 1，学校図書，1968 年.

[15] 文部省，中等数学　第三学年用（１），東京書籍，1949 年.

[16] 文部省，中学校高等学校 学習指導要領 数学科編（試案），中部図書，1951 年.

[17] 文部省発表 中学校学習指導要領 昭和 33 年（1958）改訂版，明治図書，1958 年.

[18] 岡本和夫，森杉 馨，佐々木武，根本 博ほか，未来へひろがる 数学１，啓林館，2016 年.

[19] 佐藤 篤，田谷久雄，理工基礎 代数系，サイエンス社，2018 年.

[20] 正田建次郎，塩野直道ほか，中学生の数学 第二学年 全，啓林館，1954 年.

[21] 正田建次郎，塩野直道 ほか，改訂 中学校新数学 第１学年，啓林館，1965 年.

[22] 曾田梅太郎，近藤 鶩 編，中学校 数学 第２学年用（I 学校図書，1950 年.

[23] 砂田利一，幾何入門１，２，岩波講座 現代数学への入門，岩波書店，1996 年.

[24] 高橋陽一郎ほか，詳説数学 II，啓林館，2013 年.

[25] 高橋陽一郎ほか，詳説数学 III，啓林館，2013 年.

（令和元年９月27日受理）