逆正接関数を基にした三角関数の定義について

*佐　藤　得　志

On a denition of trigonometric functions via the arctangent function

SATO Tokushi

要　旨

高等学校で学習する三角関数は, 角度の概念を基にして定義されているが, 角度というものが数学的に厳密に定義されていないため, この定義は厳密なものとは言えない. 三角関数の厳密な定義については冪級数を用いるもの等, いくつかの方法が知られている. 本稿においては, 他の文献では見られない方法ではあるが, 逆正接関数をある有理関数の原始関数として定義し, これを基にして正接関数, 余弦関数, 正弦関数を定義していく. そこから, 加法定理や周期的拡張を含む三角関数のよく知られた諸性質を導く.

Key Words : 三角関数
厳密な定義
逆正接関数
加法定理
周期的拡張

＊　宮城教育大学数学教育講座

1. 序

高校数学においては,「数学 I」において三角比が導入され,「数学 II」においては, 弧度法を用いることにより, ‘角度’ に関する関数として三角関数が導入される. しかしながら, よく指摘されることではあるが (小平 (1991), 三村 (1970), 砂田 (2017) 等), 少なくとも高校数学においては, ‘角度’ というものが数学的に厳密に定義されていないため, この定義は厳密なものとは言い難い. 大学生向けの微分積分学の教科書においては, このことに触れることなく, 三角関数は高校で学習したものとして既知とし, これを前提として述べてあるものが多い.

‘角度’ を厳密に定義するには, 弧度法の導入方法からも分かるように, 円弧の長さを知る必要があり, このためには曲線の長さの概念が必要となる. しかし, これを理解することは (少なくとも初学者にとっては) 容易なことではなく, 円周の長さを基にして円周率 π を定義することも容易なことではない. 大学生向けの微分積分学の教科書の中には, この意味での厳密性を重視し, 曲線の長さを定義した上で三角関数を定義し, その性質について論じているものもある (小平 (1991), 赤 (2014) 等).

一方, 三角関数の厳密な定義の方法としては, 冪級数展開による定義もよく知られているが (砂田 (2017) 等), 逆正弦関数から定義する方法も知られている (黒田 (2002) 等). この方法では, 区間 $(-1,1)$ 上の (無理) 関数

$$\Big[\frac{1}{\sqrt{1-\iota^2}}\Big](y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\quad \text{for } y\in(-1,1)$$

の原始関数として逆正弦関数 arcsin を定義し, その逆関数として正弦関数 sin を区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上で定義する. 更に, これを端点 (接続点) での性質を用いて実数全体 (の集合) $\mathbf{R}$ 上に拡張した上で, 余弦関数 cos, 正接関数 tan を定義し, これら三角関数の諸性質を導いていくものである. 特に, 加法定理は正弦関数, 余弦関数の微分の性質から導かれることに注意する. ここでは, 定義のための前提として, 逆関数及び微分, 積分の一般論は用いられるが, 曲線の長さの概念や, 冪級数展開による定義で用いられるような関数列, 関数項級数の知識は用いられない.

本稿においては, $\mathbf{R}$ 上の (有理) 関数

$$\Big[\frac{1}{1+\iota^2}\Big](y)=\frac{1}{1+y^2}\quad \text{for } y\in\mathbf{R}$$

の原始関数として逆正接関数 arctan を定義し, これを基にして区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上で正接関数 tan 及び余弦関数 cos, 正弦関数 sin を定義する. この定義を基にして, 三角関数に関するよく知られた諸性質を区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上で証明する. 特に, 逆正接関数の性質から正接関数の加法定理を導き, 余弦関数, 正弦関数の加法定理を示す. 更に, 加法定理から得られる事実を用いることにより, 余弦関数, 正弦関数が $\mathbf{R}$ 上の周期関数に自然に拡張され, よく知られた諸性質が成り立つことを示す. 但し, 幾何学的な性質である ‘角度’ と三角関数の関係については述べない.

この方法においても, 逆関数及び微分, 積分の一般論は用いるが, 曲線の長さの概念や関数列, 関数項級数の知識は用いないため, 定義のための前提は比較的限られていると言えるであろう. ここでの加法定理の証明方法は, 逆正接関数の定義に由来するものであり, 余弦関数, 正弦関数の微分から導く方法よりもかなり煩雑ではあるが, 証明方法の一例として意義のあるものと思われる. 一方, そこから得られる三角関数の周期的拡張においては, 区間上での等式を用いるため, 接続点の性質のみを用いた拡張よりも自然であると言えるであろう.

指数関数, 対数関数に関しては, 区間 $(0,\infty)$ 上の (有理) 関数

$$\Big[\frac{1}{\iota}\Big](y)=\frac{1}{y}\quad \text{for } y\in(0,\infty)$$

の原始関数として対数関数 log を定義し, それを基にして指数関数, 冪乗関数を定義するという方法も知られている (黒田 (2002), 砂田 (2017) 等). これに類する方法を三角関数に適用したものが, 逆正弦関数 (黒田 (2002) 等) または (本稿における) 逆正接関数を基にした定義の方法と言えるであろう. このように, 対数関数, 逆正接関数は有理関数の原始関数として表されるが, この事実により, 初等関数は ‘有理関数とその原始関数を基にして, 四則演算, 合成関数, 逆関数及び陰関数をとる操作を有限回行って得られる関数’ と言い換えることもできる. この意味では, 逆正弦関数よりも, 逆正接関数を基にして三角関数を定義する方が自然なように思われる.

なお, 本稿の内容の一部は, 本学の中等教育教員養成課程数学教育専攻の教科専門科目「微分積分学 A」の授業内容の一部として扱っている.

2. 微分積分学からの準備

次に, 本稿において用いる微分積分学の一般論について, 証明なしで述べることにする. 以下, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ とし, f が開区間 (a,b) 上で定義された実数値関数であることを $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ と表す. また, $\alpha \in \mathbf{R}$ に対し,

$$\alpha(x)=\alpha \quad \text{for } x\in \mathbf{R}$$

によって $\mathbf{R}$ 上の定数関数 $\alpha:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を定義する.

まず, 関数の連続性, 単調性と逆関数について述べる. 但し, 関数の極限の (厳密な) 定義は述べない.

定義 2.1. $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ とする.

(i) f が (a,b) 上で連続であるとは,

$$f(x)\to f(x_0) \quad \text{as } x\to x_0 \quad \text{for all } x_0\in(a,b)$$

をみたすことである.

(ii) f が (a,b) 上で狭義単調増加 (or 狭義単調減少) であるとは,

$$\begin{aligned} &x_0<x_1\in(a,b)\\ &\quad\Rightarrow\quad f(x_0)<f(x_1) \ \ (\text{or } f(x_0)>f(x_1)) \end{aligned}$$

をみたすことである. □

開区間上で定義された狭義単調増加 (or 狭義単調減少) な連続関数に対し, 次の意味での逆関数が定義できる. $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ が (a,b) 上で単射であるとき, f を (a,b) から f の値域

$$f((a,b))=\{\,f(x)\in\mathbf{R}\mid x\in(a,b)\}$$

への全単射とみなすことができ, その意味で ($f((a,b))$ を定義域とする) f の逆関数 $f^{-1}:f((a,b))\to\mathbf{R}$ を定義することができる. i.e.

$$y=f(x) \iff x=f^{-1}(y) \qquad \text{for } x\in(a,b),\ y\in f((a,b)).$$

定理 2.1. $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ が (a,b) 上で連続かつ狭義単調増加 (or 狭義単調減少) ならば, 次が成り立つ.

(i) f の値域 $f((a,b))$ は開区間である.

(ii) f は (a,b) 上の単射である.

(iii) f の逆関数 f^{-1} は開区間 $f((a,b))$ 上で連続かつ狭義単調増加 (or 狭義単調減少) である. □

注意 2.1. $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ が (a,b) 上で (連続かつ) 狭義単調増加 (or 狭義単調減少) であるとき,

$$\begin{aligned} f^{-1}\circ f(x)&=f^{-1}(f(x))=x \quad \text{for all } x\in(a,b),\\ f\circ f^{-1}(y)&=f(f^{-1}(y))=y \quad \text{for all } y\in f((a,b)) \end{aligned}$$

が成り立つ. □

例 2.1. $\quad \hat{\imath}^2(x)=x^2 \quad \text{for } x\in(0,\infty)$

とおくと, $\hat{\imath}^2:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ は $(0,\infty)$ 上で連続かつ狭義単調増加であり, $\hat{\imath}^2((0,\infty))=(0,\infty)$ をみたす. 従って, 定理 2.1 により, その逆関数 $\hat{\imath}^{1/2}=[\hat{\imath}^2]^{-1}:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ が存在し, $(0,\infty)$ 上で連続かつ狭義単調増加である. これを

$$\hat{\imath}^{1/2}(y)=[\hat{\imath}^2]^{-1}(y)=\sqrt{y} \quad \text{for } y\in(0,\infty)$$

と表すと, 注意 2.1 よって

$$\begin{aligned} x&=\hat{\imath}^{1/2}(\hat{\imath}^2(x))=\sqrt{x^2} \quad &&\text{for } x\in(0,\infty),\\ y&=\hat{\imath}^2(\hat{\imath}^{1/2}(y))=(\sqrt{y}\,)^2 &&\text{for } y\in(0,\infty) \end{aligned}$$

が得られ,

$$\begin{aligned} \sqrt{y_0y_1}&=\sqrt{(\sqrt{y_0}\,)^2(\sqrt{y_1}\,)^2}=\sqrt{(\sqrt{y_0}\sqrt{y_1}\,)^2}\\ &=\sqrt{y_0}\sqrt{y_1} \quad \text{for } y_0,y_1\in(0,\infty) \end{aligned}$$

が成り立つ. □

次に, 開区間上で定義された関数の微分可能性について述べる.

定義 2.2. $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ とする.

(i) $x\in(a,b)$ に対し, f が x において微分可能であるとは, ある $f'(x)\in\mathbf{R}$ が存在し,

$$\frac{1}{h}(\,f(x+h)-f(x))\to f'(x) \quad \text{as } h\to 0$$

をみたすことである. このとき, $f'(x)$ を f の x における微分係数という.

(ii) f が (a,b) 上で微分可能であるとは, f が任意の $x\in(a,b)$ において微分可能となることである. このとき, 各 $x\in(a,b)$ に対してその微分係数 $f'(x)\in\mathbf{R}$ を対応させる関数 $f':(a,b)\to\mathbf{R}$ を f の導関数という. 特に, f' が (a,b) 上で連続であるとき, f は (a,b) 上で C^1-級であるという. □

注意 2.2. $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ が (a,b) 上で微分可能ならば, f は (a,b) 上で連続である. □

次の例は, 定義から容易に得られる.

例 2.2. $\iota^0(x) = 1(x) = 1,\ \iota(x)\,(= \iota^1(x)) = x$ for $x \in \mathbf{R}$

とおくと, $\iota^0, \iota : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は $\mathbf{R}$ 上で C^1-級であり,

$$[\iota^0]'(x) = 0,\ \iota'(x) = 1 = \iota^0(x) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}. \qquad \square$$

微分可能な関数の (四則) 演算の微分 (導関数) に関して, 次が成り立つ.

定理 2.2. $f, g : (a,b) \to \mathbf{R}$ は (a,b) 上で微分可能とし, $\gamma \in \mathbf{R}$ とすると, 次が成り立つ.

(i) $f + g, \gamma f : (a,b) \to \mathbf{R}$ は (a,b) 上で微分可能であり,

$$[f+g]'(x) = f'(x) + g'(x) = [f' + g'](x),$$
$$[\gamma f]'(x) = \gamma f'(x) = [\gamma f'](x) \quad \text{for all } x \in (a,b).$$

(ii) $fg : (a,b) \to \mathbf{R}$ は (a,b) 上で微分可能であり,

$$\begin{aligned}[fg]'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\\ &= [f'g + fg'](x) \quad \text{for all } x \in (a,b).\end{aligned}$$

(iii) $g(x) \neq 0$ for all $x \in (a,b)$ ならば, $\dfrac{1}{g} : (a,b) \to \mathbf{R}$ は (a,b) 上で微分可能であり,

$$\Big[\frac{1}{g}\Big]'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} = \Big[-\frac{g'}{g^2}\Big](x) \quad \text{for all } x \in (a,b). \qquad \square$$

注意 2.3. 定理 2.2 (ii), (iii) を用いると, 定理 2.2 (iii) において, $\dfrac{f}{g} : (a,b) \to \mathbf{R}$ は (a,b) 上で微分可能であり,

$$\begin{aligned}\Big[\frac{f}{g}\Big]'(x) &= \frac{1}{g(x)^2}(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))\\ &= \Big[\frac{1}{g^2}(f'g - fg')\Big](x) \quad \text{for all } x \in (a,b)\end{aligned}$$

が成り立つ. $\square$

例 2.3. (i) $\iota^2(x) = x^2$ for $x \in \mathbf{R}$

とおくと,

$$\iota^2(x) = x\cdot x = \iota(x)\iota(x) = [\iota\cdot\iota](x) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}$$

であるから, 定理 2.2 (ii) 及び例 2.2 によって $\iota^2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は $\mathbf{R}$ 上で微分可能 (C^1-級) であり,

$$\begin{aligned}[\iota^2]'(x) &= [\iota\cdot\iota]'(x) = \iota'(x)\iota(x) + \iota(x)\iota'(x)\\ &= 1\cdot x + x\cdot 1 = 2x = 2\iota(x) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

(ii) $\hat\iota(x)\,(= \hat\iota^1(x)) = x$ for $x \in (0,\infty)$

とおくと, (i) により, 例 2.1 の $\hat\iota^2 : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ は $(0,\infty)$ 上で C^1-級であり,

$$[\hat\iota^2]'(x) = 2x = 2\hat\iota(x) \quad \text{for } x \in (0,\infty).$$

(iii) $\Big[\dfrac{1}{\iota}\Big](x) = \dfrac{1}{x}$ for $x \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)$

とおくと, 定理 2.2 (iii) 及び例 2.2 によって $\dfrac{1}{\iota} : (-\infty,0) \cup (0,\infty) \to \mathbf{R}$ は $(-\infty,0)$ 上, $(0,\infty)$ 上で微分可能 (C^1-級) であり,

$$\Big[\frac{1}{\iota}\Big]'(x) = -\frac{\iota'(x)}{\iota(x)^2} = -\frac{1}{x^2} = \Big[-\frac{1}{\iota^2}\Big](x) \quad \text{for } x \in (-\infty,0) \cup (0,\infty). \qquad \square$$

合成関数及び逆関数の微分については, 次が成り立つ. ここで, $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$ とする.

定理 2.3. $f : (a,b) \to \mathbf{R}$, $\varphi : (\alpha,\beta) \to \mathbf{R}$ は (a,b) 上, (α,β) 上で微分可能とすると, 次が成り立つ.

(i) $f((a,b)) \subset (\alpha,\beta)$ ならば, $\varphi\circ f : (a,b) \to \mathbf{R}$ は (a,b) 上で微分可能であり,

$$[\varphi\circ f]'(x) = \varphi'(f(x))f'(x) = [[\varphi'\circ f]\cdot f'](x) \quad \text{for all } x \in (a,b).$$

(ii) f が (a,b) 上で狭義単調増加 (or 狭義単調減少) かつ $f'(x) \neq 0$ for all $x \in (a,b)$ ならば, $f((a,b))$ は開区間, $f^{-1} : f((a,b)) \to \mathbf{R}$ は $f((a,b))$ 上で微分可能であり,

$$[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \Big[\frac{1}{f'\circ f^{-1}}\Big](y) \quad \text{for all } y \in f((a,b)). \qquad \square$$

例 2.4. (i) 例 2.1 において, 定理 2.3 (ii), 例 2.2 (ii) により, $\hat\iota^{1/2}\,(= [\hat\iota^2]^{-1}) : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ は $(0,\infty)$ 上で微分可能 (C^1-級) であり,

$$\begin{aligned}[\hat\iota^{1/2}]'(y) &= [[\hat\iota^2]^{-1}]'(y) = \frac{1}{[\hat\iota^2]'([\hat\iota^2]^{-1}(y))}\\ &= \frac{1}{2\hat\iota(\hat\iota^{1/2}(y))} = \frac{1}{2\hat\iota^{1/2}(y)}\\ &= \Big[\frac{1}{2\hat\iota^{1/2}}\Big](y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{for } y \in (0,\infty).\end{aligned}$$

(ii) 定理 2.2 (iii) 及び (i) を用いると, $\dfrac{1}{\hat\iota^{1/2}} : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ は $(0,\infty)$ 上で微分可能 (C^1-級) であり,

$$\begin{aligned}\Big[\frac{1}{\hat\iota^{1/2}}\Big]'(y) &= -\frac{[\hat\iota^{1/2}]'(y)}{(\hat\iota^{1/2}(y))^2}\\ &= -\frac{1}{(\hat\iota^{1/2}(y))^2}\frac{1}{2\hat\iota^{1/2}(y)}\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2(\hat{\imath}^{1/2}(y))^3} = \Big[-\frac{1}{2(\hat{\imath}^{1/2})^3}\Big](y)$$
$$= -\frac{1}{2(\sqrt{y}\,)^3} = -\frac{1}{2y\sqrt{y}}$$
$$\text{for } y \in (0,\infty).$$ □

また, 平均値の定理により, 関数の増減に関する次の定理が成り立つ.

定理 2.4. $a < b \in \mathbf{R}$ とし, $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ は $[a,b]$ 上で連続かつ (a,b) 上で微分可能とすると, 次が成り立つ.

(i) $f'(x) > 0$ (or $f'(x) < 0$) for all $x \in (a,b)$

ならば, f は $[a,b]$ 上で狭義単調増加 (or 狭義単調減少) である.

(ii) $f'(x) = 0$ for all $x \in (a,b)$

ならば, f は $[a,b]$ 上の定数関数である. □

次に, 原始関数を定義する.

定義 2.3. $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ とする. このとき, $F : (a,b) \to \mathbf{R}$ が f の (a,b) 上での原始関数であるとは, F は (a,b) 上で微分可能であって,

$$F'(x) = f(x) \quad \text{for all } x \in (a,b)$$

をみたすことである. □

注意 2.4. $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ とする.

(i) f が (a,b) 上で微分可能ならば, f はその導関数 $f' : (a,b) \to \mathbf{R}$ の (a,b) 上での原始関数である.

(ii) $F : (a,b) \to \mathbf{R}$ が (a,b) 上での f の原始関数であるとき, 任意の $\gamma \in \mathbf{R}$ に対し,

$$[F+\gamma](x) = F(x) + \gamma \quad \text{for } x \in (a,b)$$

も f の (a,b) 上での原始関数である. 特に, f の (a,b) 上での原始関数は (存在しても) 一意的でない. □

更に, 定理 2.4 を用いると, 次が成り立つ.

命題 2.1. $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ とし, $F, \tilde{F} : (a,b) \to \mathbf{R}$ は共に f の (a,b) 上での原始関数とする. このとき, ある $\gamma \in \mathbf{R}$ が存在して,

$$\tilde{F}(x) = F(x) + \gamma = [F+\gamma](x) \quad \text{for all } x \in (a,b)$$

が成り立つ. 特に,

$$F(x_1) - F(x_0) = \tilde{F}(x_1) - \tilde{F}(x_0)$$
$$\text{for all } x_0, x_1 \in (a,b)$$

である. □

これより, 次を定義することができる.

定義 2.4. (i) $F : (a,b) \to \mathbf{R}$ とするとき,

$$\Big[F(t)\Big]_{t=x_0}^{x_1} = F(x_1) - F(x_0) \quad \text{for } x_0, x_1 \in (a,b)$$

と定義する.

(ii) $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ が (a,b) 上での原始関数 $F : (a,b) \to \mathbf{R}$ をもつとき,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_{t=x_0}^{x_1} = F(x_1) - F(x_0)$$
$$\text{for } x_0, x_1 \in (a,b)$$

と定義する (命題 2.1 により, この定義は well-defined である).

(iii) (ii) において, $c \in (a,b)$ に対し,

$$F[f;c](x) = \int_c^x f(t)\,dt \quad \text{for } x \in (a,b)$$

によって $F[f;c] : (a,b) \to \mathbf{R}$ を定義する. □

注意 2.5. $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ は (a,b) 上での原始関数をもつとすると, 次が成り立つ.

(i) $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt = 0$ for all $x_0 \in (a,b)$.

(ii) $$\int_{x_1}^{x_3} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt + \int_{x_2}^{x_3} f(t)\,dt$$
$$\text{for all } x_1, x_2, x_3 \in (a,b).$$

(iii) $$\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt = -\int_{x_1}^{x_0} f(t)\,dt = \int_{-x_1}^{-x_0} f(-s)\,ds$$
$$\text{for all } x_0, x_1 \in (a,b).$$

(iv) $c \in (a,b)$ のとき, $F : (a,b) \to \mathbf{R}$ を f の (a,b) 上での原始関数とすると,

$$F[f;c](x) = \int_c^x f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_{t=c}^{x}$$
$$= F(x) - F(c) \quad \text{for } x \in (a,b)$$

であるから, $F[f;c]$ は f の (a,b) 上での原始関数であり, $F[f;c](c) = 0$ をみたす. □

Riemann 積分の理論を用いると, 次が成り立つことが分かり, (a,b) 上の連続関数 f に対して, 原始関数 $F[f;c]$ を定義できることが分かる.

定理 2.5. $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ が (a,b) 上で連続ならば, f の (a,b) 上での原始関数 $F : (a,b) \to \mathbf{R}$ が存在する. □

最後に, 広義積分について述べる. 次が成り立つことに注意する.

命題 2.2. $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ は (a,b) 上で連続, $c_0\in(a,b)$ とし, $I^-[f;c_0], I^+[f;c_0]\in\mathbf{R}$ が存在して

$$F[f;c_0](x)\to I^-[f;c_0]\quad\text{as } x\to a,$$
$$F[f;c_0](x)\to I^+[f;c_0]\quad\text{as } x\to b$$

をみたすとする. このとき, 任意の $c\in(a,b)$ に対し,

$$F[f;c](x)\to I^-[f;c]\quad\text{as } x\to a,$$
$$F[f;c](x)\to I^+[f;c]\quad\text{as } x\to b$$

をみたす $I^-[f;c], I^+[f;c]\in\mathbf{R}$ が存在し,

$$I^+[f;c]-I^-[f;c]=I^+[f;c_0]-I^-[f;c_0]$$

が成り立つ. □

これより, 次を定義することができる.

定義 2.5. $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ は (a,b) 上で連続とする. このとき, f が (a,b) 上で広義積分可能であるとは, ある $c_0\in(a,b)$ 及び $I^-[f;c_0], I^+[f;c_0]\in\mathbf{R}$ が存在して,

$$F[f;c_0](x)\left(=-\int_x^{c_0}f(t)dt\right)\to I^-[f;c_0]\quad\text{as } x\to a,$$
$$F[f;c_0](x)\left(=\int_{c_0}^{x}f(t)dt\right)\to I^+[f;c_0]\quad\text{as } x\to b$$

となることである. このとき,

$$\int_a^b f(t)dt=I^+[f;c_0]-I^-[f;c_0]$$

とおき, この値を f の (a,b) 上での広義積分という (命題 2.2 により, この値は $c_0\in(a,b)$ の選び方に依存しない). □

ここでは, 円周率 π を次の広義積分の値として定義する.

例 2.5. $\left[\dfrac{1}{1+\iota^2}\right](y)=\dfrac{1}{1+y^2}\quad\text{for } y\in\mathbf{R}$

とおくと, $\dfrac{1}{1+\iota^2}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は $\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$ 上で広義積分可能である. このとき, この広義積分の値を円周率と呼び,

$$\pi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+s^2}ds$$

と表す. □

3. 逆正接関数と三角関数

ここでは, 逆三角関数の (独立) 変数を y, 三角関数の (独立) 変数を x で表すことにする. まず, 逆三角関数の 1 つである逆正接関数を定義する.

定義 3.1.
$$\arctan y=F\left[\frac{1}{1+\iota^2};0\right](y)=\int_0^y\frac{1}{1+s^2}ds\quad\text{for } y\in\mathbf{R}$$

とおき, $\arctan:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を逆正接関数という. □

注意 2.5, 例 2.4 を用いると, 次が得られる.

定理 3.1. (i) $\arctan 0=0,$
$$\arctan(-y)=-\arctan y\quad\text{for } y\in\mathbf{R}.$$

(ii) $\arctan:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は $\mathbf{R}$ 上で C^1-級であり,

$$[\arctan]'(y)=\left[\frac{1}{1+\iota^2}\right](y)=\frac{1}{1+y^2}>0\quad\text{for } y\in\mathbf{R}.$$

(iii) arctan は $\mathbf{R}$ 上で連続かつ狭義単調増加であり,

$$\arctan y\to\pm\frac{\pi}{2}\quad\text{as } y\to\pm\infty$$

(複号同順). 特に,

$$\arctan((-\infty,0))=\left(-\frac{\pi}{2},0\right),$$
$$\arctan((0,\infty))=\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\arctan(\mathbf{R})=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$ □

いま, 定理 3.1 (iii) によって 逆正接関数 $\arctan:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は $\mathbf{R}$ 上で狭義単調増加かつ $\arctan(\mathbf{R})=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ をみたすから, その逆関数として正接関数を定義することができる.

定義 3.2. 逆正接関数 $\arctan:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ の逆関数を

$$\tan=[\arctan]^{-1}:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$$

と表し, これを ($\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上の) 正接関数という. □

このとき, 定理 3.1 によって次が成り立つ.

定理 3.2. (i) $\tan 0=0,$
$$\tan(-x)=-\tan x\quad\text{for } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

(ii) $\tan:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$ は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上で連続かつ狭義単調増加であり,

$$\tan x\to\pm\infty\quad\text{as } x\to\pm\frac{\pi}{2}\mp 0$$

(複号同順). 特に,

$$\tan\left(\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\right)=(-\infty,0),\ \tan\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=(0,\infty),$$
$$\tan\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)=\mathbf{R}.$$

(iii) $\tan$ は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上で C^1-級であり,

$$[\tan]'(x)=1+(\tan x)^2>0 \quad \text{for } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

証明. (iii) のみ示す.

定理 3.1 (ii) 及び定理 2.3 (ii) によって $\tan$ は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上で微分可能であり,

$$\begin{aligned}[\tan]'(x)&=[[\arctan]^{-1}]'(x)\\&=\frac{1}{[\arctan]'([\arctan]^{-1}(x))}\\&=\frac{1}{\left[\frac{1}{1+\iota^2}\right](\tan x)}=\frac{1}{\frac{1}{1+(\tan x)^2}}\\&=1+(\tan x)^2 \quad \text{for } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, (ii) により, $[\tan]'=1+\iota^2\circ\tan$ は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上で連続であり, $\tan$ は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上で C^1-級である. □

次に, $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上で余弦関数, 正弦関数を定義する. 正接関数, 余弦関数, 正弦関数を合わせて, 三角関数という. これらの関数は $\mathbf{R}$ 上に自然に拡張することができるが, それについては後で述べることにする.

定義 3.3.

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+(\tan x)^2}},\ \sin x=\frac{\tan x}{\sqrt{1+(\tan x)^2}} \quad \text{for } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

とおき, $\cos,\sin:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$ を ($\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上の) 余弦関数, 正弦関数という. □

注意 3.1. $$(\cos x)^2=\frac{1}{1+(\tan x)^2}>0 \quad \text{for } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

であるから, 定理 3.2 (iii) によって

$$[\tan]'(x)=1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2} \quad \text{for } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つ. □

余弦関数, 正弦関数に関して, 次が成り立つ.

定理 3.3. (i)
$$\begin{gathered}\cos 0=1,\ \sin 0=0,\\ \cos(-x)=\cos x,\ \sin(-x)=-\sin x,\\ \tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\ (\cos x)^2+(\sin x)^2=1\\ \text{for } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).\end{gathered}$$

(ii) $\cos,\sin:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$ は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上で C^1-級であり,

$$[\cos]'(x)=-\sin x,\ [\sin]'(x)=\cos x \quad \text{for } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

(iii) $\cos,\sin$ はそれぞれ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上で連続で, $\cos$ は $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上で狭義単調増加, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上で狭義単調減少, $\sin$ は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上で狭義単調増加であり,

$$\cos x\to 0,\ \sin x\to\pm 1 \quad \text{as } x\to\pm\frac{\pi}{2}\mp 0$$

(複号同順). 特に,

$$\begin{gathered}\cos\left(\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\right)=\cos\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=(0,1),\\ \cos\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)=(0,1],\ \sin\left(\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\right)=(-1,0),\\ \sin\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=(0,1),\ \sin\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)=(-1,1).\end{gathered}$$

証明. (i) 定義 3.3, 定理 3.2 (i) による.

(ii) 定理 3.2 (ii) によって, $\cos,\sin$ は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上で連続である. また,

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+(\tan x)^2}}=\left[\frac{1}{\hat{\iota}^{1/2}}\right]\circ[1+\iota^2\circ\tan](x) \quad \text{for } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

であるから, 定理 2.3 (i), 例 2.4 (ii), 定理 3.2 (iii) により,

$$\begin{aligned}[\cos]'(x)&=\left[\frac{1}{\hat{\iota}^{1/2}}\right]'([1+\iota^2\circ\tan](x))\\&\quad\cdot[1+\iota^2\circ\tan]'(x)\\&=\left[-\frac{1}{2(\hat{\iota}^{1/2})^3}\right](1+(\tan x)^2)\\&\quad\cdot[\iota^2]'(\tan x)[\tan]'(x)\\&=-\frac{1}{2(\sqrt{1+(\tan x)^2})^3}\\&\quad\cdot 2\iota(\tan x)(1+(\tan x)^2)\\&=-\frac{\tan x}{\sqrt{1+(\tan x)^2}}=-\sin x\\&\quad \text{for } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．また，

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+(\tan x)^2}} = [\tan\cdot\cos](x) \quad \text{for } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

であるから，定理 2.2 (ii)，注意 3.1 及び (i) により，

$$\begin{aligned}[\sin]'(x) &= [\tan]'(x)\cos x + (\tan x)[\cos]'(x) \\ &= \frac{1}{(\cos x)^2}\cos x + \frac{\sin x}{\cos x}(-\sin x) \\ &= \frac{1}{\cos x} - \frac{(\sin x)^2}{\cos x} = \frac{(\cos x)^2}{\cos x} \\ &= \cos x \quad \text{for } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．特に，(ii) によって $[\cos]' = -\sin$, $[\sin]' = \cos$ は $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上で連続であり，cos, sin は $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上で C^1-級である．

(iii)　(ii) 及び定理 3.2 (ii) によって，

$$\begin{aligned}&[\cos]'\left(\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)\right) = -\sin\left(\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)\right) \subset (0,1), \\ &[\cos]'\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \subset (-1,0), \\ &[\sin]'\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) \subset (0,1]\end{aligned}$$

であるから，定理 2.4 (i) によって，cos は $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 上で狭義単調増加，$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上で狭義単調減少，sin は $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上で狭義単調増加である．また，定理 3.2 (ii) によって

$$(\tan x)^2 \to \infty \quad \text{as } x \to \pm\frac{\pi}{2} \mp 0$$

であるから，

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1}{\sqrt{1+(\tan x)^2}} \to 0, \\ \sin x &= \frac{\tan x}{\sqrt{1+(\tan x)^2}} = \frac{\dfrac{\tan x}{|\tan x|}}{\dfrac{\sqrt{1+(\tan x)^2}}{\sqrt{(\tan x)^2}}} \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{(\tan x)^2}}} \to \pm 1 \quad \text{as } x \to \pm\frac{\pi}{2} \mp 0\end{aligned}$$

(複号同順) が成り立つ．　□

4. 三角関数の加法定理

次に，三角関数の加法定理を証明する．まず，正接関数の加法定理を証明するため，逆正接関数に関する次の 3 つの補題を準備する．

補題 4.1.

$$\arctan y + \arctan\frac{1}{y} = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{for } y \in (-\infty, 0), \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{for } y \in (0, \infty). \end{cases}$$

証明.

$$\begin{aligned}\psi(y) &= \arctan y + \arctan\frac{1}{y} \\ &= \left[\arctan + \arctan\circ\left[\frac{1}{\iota}\right]\right](y) \\ &\quad \text{for } y \in (-\infty, 0)\cup(0,\infty)\end{aligned}$$

とおくと，定理 3.1 (ii)，定理 2.3 (i)，例 2.3 (iii) によって $\psi : (-\infty,0)\cup(0,\infty) \to \mathbf{R}$ は $(-\infty,0)$ 上，$(0,\infty)$ 上で微分可能であり，

$$\begin{aligned}\psi'(y) &= [\arctan]'(y) + [\arctan]'\left(\left[\frac{1}{\iota}\right](y)\right)\left[\frac{1}{\iota}\right]'(y) \\ &= \left[\frac{1}{1+\iota^2}\right](y) + \left[\frac{1}{1+\iota^2}\right]\left(\frac{1}{y}\right)\left[-\frac{1}{\iota^2}\right](y) \\ &= \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{y}\right)^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right) = 0 \\ &\quad \text{for } y \in (-\infty,0)\cup(0,\infty)\end{aligned}$$

が成り立つ．従って，定理 2.4 (ii) により，ψ の $(-\infty,0)$ 上，$(0,\infty)$ 上への制限 $\psi|_{(-\infty,0)} : (-\infty,0) \to \mathbf{R}$, $\psi|_{(0,\infty)} : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ は $(-\infty,0)$ 上，$(0,\infty)$ 上の定数関数となるから，

$$\begin{aligned}\psi(y) &= [\psi|_{(-\infty,0)}](y) = \alpha^- \quad \text{for } y \in (-\infty,0), \\ \psi(y) &= [\psi|_{(0,\infty)}](y) = \alpha^+ \quad \text{for } y \in (0,\infty)\end{aligned}$$

をみたす $\alpha^-, \alpha^+ \in \mathbf{R}$ が存在する．このとき，定理 3.1 (i), (ii) によって

$$\alpha^\pm = \psi(y) = \arctan y + \arctan\frac{1}{y} \to \pm\frac{\pi}{2} \quad \text{as } y \to \pm\infty$$

(複号同順) であるから，$\alpha^\pm = \pm\frac{\pi}{2}$ が得られ，主張が従う．　□

補題 4.2. (i)　$y_0 \in (-\infty, 0)$ のとき，

$$\arctan y_0 + \arctan y - \arctan\frac{y_0+y}{1-y_0 y} = \begin{cases} -\pi & \text{for } y \in \left(-\infty, \dfrac{1}{y_0}\right), \\ 0 & \text{for } y \in \left(\dfrac{1}{y_0}, \infty\right). \end{cases}$$

(ii)　$y_0 \in (0, \infty)$ のとき，

$$\arctan y_0 + \arctan y - \arctan\frac{y_0+y}{1-y_0 y}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{for } y \in \Big(-\infty, \dfrac{1}{y_0}\Big), \\ \pi & \text{for } y \in \Big(\dfrac{1}{y_0}, \infty\Big). \end{cases}$$

証明. (a) $y_0 \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ に対し,

$$\begin{aligned} \psi[y_0](y) &= \arctan y_0 + \arctan y - \arctan \frac{y_0 + y}{1 - y_0 y} \\ &= \Big[(\arctan y_0) + \arctan \\ &\qquad - \arctan \circ \Big[\frac{y_0 + \iota}{1 - y_0\,\iota}\Big]\Big](y) \\ &\qquad \text{for } y \in \Big(-\infty, \frac{1}{y_0}\Big) \cup \Big(\frac{1}{y_0}, \infty\Big) \end{aligned}$$

とおくと, $\psi[y_0] : \Big(-\infty, \dfrac{1}{y_0}\Big) \cup \Big(\dfrac{1}{y_0}, \infty\Big) \to \mathbf{R}$ は $\Big(-\infty, \dfrac{1}{y_0}\Big)$ 上, $\Big(\dfrac{1}{y_0}, \infty\Big)$ 上で微分可能である.

$$(1 - y_0 y)^2 + (y_0 + y)^2 = (1 + y_0^2)(1 + y^2) \quad \text{for } y \in \mathbf{R}$$

であることに注意すると, 定理 2.2 (i), (ii), 定理 2.3 (i) を用いることにより,

$$\begin{aligned} [\arctan]'\Big(\Big[\frac{y_0 + \iota}{1 - y_0\,\iota}\Big](y)\Big) &= \Big[\frac{1}{1 + \iota^2}\Big]\Big(\frac{y_0 + y}{1 - y_0 y}\Big) \\ &= \frac{1}{1 + \Big(\dfrac{y_0 + y}{1 - y_0 y}\Big)^2} \\ &= \frac{(1 - y_0 y)^2}{(1 + y_0^2)(1 + y^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Big[\frac{y_0 + \iota}{1 - y_0\,\iota}\Big]'(y) &= \frac{1}{[1 - y_0\,\iota](y)^2} \\ &\quad \cdot \{[y_0 + \iota]'(y)[1 - y_0\,\iota](y) \\ &\qquad - [y_0 + \iota](y)[1 - y_0\,\iota]'(y)\} \\ &= \frac{1}{(1 - y_0 y)^2} \\ &\quad \cdot (1 \cdot (1 - y_0 y) - (y_0 + y)(-y_0)) \\ &= \frac{1 + y_0^2}{(1 - y_0 y)^2} \\ &\qquad \text{for } y \in \Big(-\infty, \frac{1}{y_0}\Big) \cup \Big(\frac{1}{y_0}, \infty\Big) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \psi[y_0]'(y) &= [\arctan]'(y) \\ &\quad - [\arctan]'\Big(\Big[\frac{y_0 + \iota}{1 - y_0\,\iota}\Big](y)\Big) \\ &\quad \cdot \Big[\frac{y_0 + \iota}{1 - y_0\,\iota}\Big]'(y) \\ &= \frac{1}{1 + y^2} \\ &\quad - \frac{(1 - y_0 y)^2}{(1 + y_0^2)(1 + y^2)} \frac{1 + y_0^2}{(1 - y_0 y)^2} \\ &= 0 \quad \text{for } y \in \Big(-\infty, \frac{1}{y_0}\Big) \cup \Big(\frac{1}{y_0}, \infty\Big) \end{aligned}$$

が成り立つ. 定理 2.4 (ii) により, $\psi[y_0]|_{(-\infty, 1/y_0)} : \Big(-\infty, \dfrac{1}{y_0}\Big) \to \mathbf{R}$, $\psi[y_0]|_{(1/y_0, \infty)} : \Big(\dfrac{1}{y_0}, \infty\Big) \to \mathbf{R}$ はそれぞれ $\Big(-\infty, \dfrac{1}{y_0}\Big)$ 上, $\Big(\dfrac{1}{y_0}, \infty\Big)$ 上の定数関数となるから,

$$\begin{aligned} \psi[y_0](x) &= [\psi[y_0]|_{(-\infty, 1/y_0)}](y) = \alpha^-[y_0] \\ &\qquad \text{for } y \in \Big(-\infty, \frac{1}{y_0}\Big), \\ \psi[y_0](x) &= [\psi[y_0]|_{(1/y_0, \infty)}](y) = \alpha^+[y_0] \\ &\qquad \text{for } y \in \Big(\frac{1}{y_0}, \infty\Big) \end{aligned}$$

をみたす $\alpha^-[y_0], \alpha^+[y_0] \in \mathbf{R}$ が存在する.

(b) $y_0 \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ のとき, 定理 3.1 (iii), (i) によって

$$\begin{aligned} \arctan \frac{y_0 + y}{1 - y_0 y} &= \arctan \frac{\dfrac{y_0}{y} + 1}{\dfrac{1}{y} - y_0} \\ &\to \arctan \frac{1}{-y_0} = -\arctan \frac{1}{y_0} \\ &\qquad \text{as } y \to \pm\infty \end{aligned}$$

(複号任意) が成り立つことに注意する.

(i) $y_0 \in (-\infty, 0)$ のとき, 補題 4.1 によって

$$\arctan y_0 + \arctan \frac{1}{y_0} = -\frac{\pi}{2}$$

であるから, (a) 及び定理 3.1 (iii) より,

$$\begin{aligned} \alpha^\pm[y_0] &= \psi[y_0](y) \\ &= \arctan y_0 - \arctan \frac{y_0 + y}{1 - y_0 y} + \arctan y \\ &\to \arctan y_0 + \arctan \frac{1}{y_0} \pm \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{as } y \to \pm\infty \end{aligned}$$

(複号同順) が得られ, 主張が従う.

(ii) $y_0 \in (0, \infty)$ のとき, 補題 4.1 によって

$$\arctan y_0 + \arctan \frac{1}{y_0} = \frac{\pi}{2}$$

であるから, (a) 及び定理 3.1 (iii) より,

$$\begin{aligned} \alpha^\pm[y_0] &= \psi[y_0](y) \\ &= \arctan y_0 - \arctan \frac{y_0 + y}{1 - y_0 y} + \arctan y \\ &\to \arctan y_0 + \arctan \frac{1}{y_0} \pm \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{as } y \to \pm\infty$$

(複号同順) が得られ, 主張が従う. □

補題 4.1, 補題 4.2 と定理 3.1 (iii) を合わせて整理すると, 次が得られる.

補題 4.3. $\arctan y_0 + \arctan y_1$

$$= \begin{cases} \arctan \dfrac{y_0 + y_1}{1 - y_0 y_1} - \pi \in \left(-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \qquad \text{if } y_0 y_1 > 1,\ y_0, y_1 \in (-\infty, 0), \\ -\dfrac{\pi}{2} \in \left\{-\dfrac{\pi}{2}\right\} \\ \qquad \text{if } y_0 y_1 = 1,\ y_0, y_1 \in (-\infty, 0), \\ \arctan \dfrac{y_0 + y_1}{1 - y_0 y_1} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \qquad \text{if } y_0 y_1 < 1,\ y_0, y_1 \in \mathbf{R}, \\ \dfrac{\pi}{2} \in \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} \\ \qquad \text{if } y_0 y_1 = 1,\ y_0, y_1 \in (0, \infty), \\ \arctan \dfrac{y_0 + y_1}{1 - y_0 y_1} + \pi \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \qquad \text{if } y_0 y_1 > 1,\ y_0, y_1 \in (0, \infty) \end{cases}$$

が成り立つ. 特に, $y_0, y_1 \in \mathbf{R}$ に対して

$$y_0 y_1 < 1 \iff \arctan y_0 + \arctan y_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つ. □

これらを用いて, 正接関数の加法定理を証明する.

定理 4.1. $x_0, x_1, x_0 + x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ならば,

$$(\tan x_0)(\tan x_1) < 1,$$
$$\tan(x_0 + x_1) = \frac{\tan x_0 + \tan x_1}{1 - (\tan x_0)(\tan x_1)}.$$

証明. $x_0, x_1, x_0 + x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ とすると,

$$\arctan(\tan x_0) + \arctan(\tan x_1) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

であるから, 補題 4.3 によって $(\tan x_0)(\tan x_1) < 1$ であり, 補題 4.2 によって

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 &= \arctan(\tan x_0) + \arctan(\tan x_1) \\ &= \arctan \frac{\tan x_0 + \tan x_1}{1 - (\tan x_0)(\tan x_1)} \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って,

$$\begin{aligned} \tan(x_0 + x_1) &= \tan\left(\arctan \frac{\tan x_0 + \tan x_1}{1 - (\tan x_0)(\tan x_1)}\right) \\ &= \frac{\tan x_0 + \tan x_1}{1 - (\tan x_0)(\tan x_1)} \end{aligned}$$

が得られる. □

次に, 余弦関数, 正弦関数の加法定理を示す.

定理 4.2. $x_0, x_1, x_0 + x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ならば,

$$\cos(x_0 + x_1) = (\cos x_0)(\cos x_1) - (\sin x_0)(\sin x_1),$$
$$\sin(x_0 + x_1) = (\sin x_0)(\cos x_1) + (\cos x_0)(\sin x_1).$$

証明. $x_0, x_1, x_0 + x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ とすると,

$$\begin{aligned} &(1 - (\tan x_0)(\tan x_1))^2 + (\tan x_0 + \tan x_1)^2 \\ &\quad = (1 + (\tan x_0)^2)(1 + (\tan x_1)^2) \end{aligned}$$

であり, 定理 4.1, 注意 3.1 によって, $(\tan x_0)(\tan x_1) < 1$ かつ

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{(\cos(x_0 + x_1))^2} &= 1 + (\tan(x_0 + x_1))^2 \\ &= 1 + \left(\frac{\tan x_0 + \tan x_1}{1 - (\tan x_0)(\tan x_1)}\right)^2 \\ &= \frac{(1 - (\tan x_0)(\tan x_1))^2 + (\tan x_0 + \tan x_1)^2}{(1 - (\tan x_0)(\tan x_1))^2} \\ &= \frac{(1 + (\tan x_0)^2)(1 + (\tan x_1)^2)}{(1 - (\tan x_0)(\tan x_1))^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 < \cos(x_0 + x_1) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan(x_0 + x_1))^2}} \\ &= \frac{1 - (\tan x_0)(\tan x_1)}{\sqrt{1 + (\tan x_0)^2}\sqrt{1 + (\tan x_1)^2}} \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って,

$$\begin{aligned} \cos(x_0 + x_1) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan x_0)^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan x_1)^2}} \\ &\quad \cdot (1 - (\tan x_0)(\tan x_1)) \\ &= (\cos x_0)(\cos x_1)\left(1 - \frac{\sin x_0}{\cos x_0}\frac{\sin x_1}{\cos x_1}\right) \\ &= (\cos x_0)(\cos x_1) - (\sin x_0)(\sin x_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x_0 + x_1) &= \tan(x_0 + x_1)\cos(x_0 + x_1) \\ &= \frac{\tan x_0 + \tan x_1}{1 - (\tan x_0)(\tan x_1)} \\ &\quad \cdot \frac{1 - (\tan x_0)(\tan x_1)}{\sqrt{1 + (\tan x_0)^2}\sqrt{1 + (\tan x_1)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan x_0)^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan x_1)^2}} \\ &\quad \cdot (\tan x_0 + \tan x_1) \\ &= (\cos x_0)(\cos x_1)\left(\frac{\sin x_0}{\cos x_0} + \frac{\sin x_1}{\cos x_1}\right) \\ &= (\sin x_0)(\cos x_1) + (\cos x_0)(\sin x_1) \end{aligned}$$

が得られる. □

5. 三角関数の拡張

次に, 余弦関数, 正弦関数を $\mathbf{R}$ 上に拡張すること

を考える. このために, 次の事実が基となるが, これは余弦関数, 正弦関数の加法定理から得られる.

補題 5.1.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \quad \text{for } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

証明. $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ とすると, $\frac{\pi}{2}-x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ であり, $h\in(0,x)$ とすると,

$$-x+h\in(-x,0)\subset\left(-\frac{\pi}{2},0\right),$$
$$\frac{\pi}{2}-h\in\left(\frac{\pi}{2}-x,\frac{\pi}{2}\right)\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つ. このとき, 定理 4.2, 定理 3.3 (i), (iii) によって

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-h\right)+(-x+h)\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\cos(-x+h)\\&\quad-\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\sin(-x+h)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\cos(x-h)\\&\quad+\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\sin(x-h)\\&\to\sin x,\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}-h\right)+(-x+h)\right)\\&=\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\cos(-x+h)\\&\quad+\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\sin(-x+h)\\&=\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\cos(x-h)\\&\quad-\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\sin(x-h)\\&\to\cos x\quad\text{as } h\to+0\end{aligned}$$

が得られ, 主張が従う. □

定理 3.3 (i) と合わせると, 次が成り立つ.

命題 5.1.

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin x=-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{for } x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right),$$
$$\cos x=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right),\ \sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{for } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$ □

いま,

$$x+\frac{\pi}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right]\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{for } x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right],$$
$$x-\frac{\pi}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{for } x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$$

であるから, 命題 5.1 により, 次によって $\cos,\sin$ を $(-\pi,\pi)$ 上に拡張するのが自然であろう.

定義 5.1.

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin x=-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{for } x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right],$$
$$\cos x=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right),\ \sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{for } x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$$

によって $\cos,\sin$ を $(-\pi,\pi)$ 上に拡張する. □

注意 5.1. (i) 定義 5.1, 定理 3.3 (i) により,

$$\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\mp\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}\right)=\mp\sin 0=0,$$
$$\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2}\right)=\pm\cos 0=\pm1$$

(複号同順).

(ii) (i) 及び命題 5.1 (ii), 定義 5.1 によって

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin x=-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{for } x\in(-\pi,0],$$
$$\cos x=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right),\ \sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{for } x\in[0,\pi).$$ □

この定義に従うと, 次が得られる.

命題 5.2. $\cos,\sin:(-\pi,\pi)\to\mathbf{R}$ に対して次が成り立つ.

(i) $\cos(-x)=\cos x,\ \sin(-x)=-\sin x$ for $x\in(-\pi,\pi)$.

(ii) $\cos x=-\cos(x+\pi),\ \sin x=-\sin(x+\pi)$ for $x\in(-\pi,0)$,
$\cos x=-\cos(x-\pi),\ \sin x=-\sin(x-\pi)$ for $x\in(0,\pi)$.

証明. (i) 定義 5.1 及び定理 3.3 (i) による.

(ii)(a) $x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ のとき,

$$x+\frac{\pi}{2},x\in(-\pi,0]$$

であるから, 注意 5.1 (ii) によって

$$
\begin{aligned}
-\cos(x+\pi) &= -\cos\left(\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x,\\
-\sin(x+\pi) &= -\sin\left(\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin x
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

(b) $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ のとき,

$$x+\pi, x+\frac{\pi}{2} \in [0,\pi)$$

であるから, 注意 5.1 (ii) によって

$$
\begin{aligned}
-\cos(x+\pi) &= \sin\left((x+\pi)-\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \cos\left(\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right) = \cos x,\\
-\sin(x+\pi) &= -\cos\left((x+\pi)-\frac{\pi}{2}\right)\\
&= -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \sin\left(\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

(c) $x \in (0,\pi)$ のとき, $-x \in (-\pi, 0)$ であるから, (i) 及び (a), (b) により,

$$
\begin{aligned}
-\cos(x-\pi) &= -\cos(-x+\pi)\\
&= \cos(-x) = \cos x,\\
-\sin(x-\pi) &= \sin(-x+\pi)\\
&= -\sin(-x) = \sin x
\end{aligned}
$$

が成り立つ. □

更に,

$$
\begin{aligned}
&x+\pi \in (-\pi,0] \subset (-\pi,\pi) \quad \text{for } x \in (-2\pi,-\pi],\\
&x-\pi \in [0,\pi) \subset (-\pi,\pi) \quad \text{for } x \in [\pi,2\pi)
\end{aligned}
$$

であるから, 命題 5.2 (ii) により, 次によって $\cos, \sin$ を $(-2\pi, 2\pi)$ 上に拡張するのが自然であろう.

定義 5.2.

$$
\begin{aligned}
&\cos x = -\cos(x+\pi),\ \sin x = -\sin(x+\pi)\\
&\qquad \text{for } x \in (-2\pi,-\pi],\\
&\cos x = -\cos(x-\pi),\ \sin x = -\sin(x-\pi)\\
&\qquad \text{for } x \in [\pi,2\pi)
\end{aligned}
$$

によって $\cos, \sin$ を $(-2\pi, 2\pi)$ 上に拡張する. □

注意 5.2. (i) 定義 5.2, 定理 3.3 (i) により,

$$
\begin{aligned}
&\cos(\pm\pi) = -\cos(\pm\pi\mp\pi) = -\cos 0 = -1,\\
&\sin(\pm\pi) = -\sin(\pm\pi\mp\pi) = -\sin 0 = 0
\end{aligned}
$$

(複号同順).

(ii) (i) 及び命題 5.2 (ii), 定義 5.2 によって

$$
\begin{aligned}
&\cos x = -\cos(x+\pi),\ \sin x = -\sin(x+\pi)\\
&\qquad \text{for } x \in (-2\pi,0],\\
&\cos x = -\cos(x-\pi),\ \sin x = -\sin(x-\pi)\\
&\qquad \text{for } x \in [0,2\pi).
\end{aligned}
$$

□

この定義に従うと, 次が得られるが, 証明は省略する.

命題 5.3. $\cos, \sin : (-2\pi, 2\pi) \to \mathbf{R}$ に対して次が成り立つ.

(i) $\cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x$
　for $x \in (-2\pi, 2\pi)$.

(ii) $\cos x = \cos(x+2\pi),\ \sin x = \sin(x+2\pi)$
　for $x \in (-2\pi, 0)$.
$\cos x = \cos(x-2\pi),\ \sin x = \sin(x-2\pi)$
　for $x \in (0, 2\pi)$. □

そこで, 次によって $\cos, \sin$ を $\mathbf{R}$ 上の関数に拡張する. いま,

$$\mathbf{R} = \bigcup_{m\in\mathbf{Z}} [(2m-1)\pi, (2m+1)\pi]$$

($\mathbf{Z}$ は整数全体の集合) であり,

$$
\begin{aligned}
&x - 2m\pi \in [-\pi,\pi] \subset (-2\pi,2\pi)\\
&\qquad \text{for } x \in [(2m-1)\pi,(2m+1)\pi],\ m \in \mathbf{Z}
\end{aligned}
$$

かつ

$$
\begin{aligned}
&[(2(m-1)-1)\pi, (2(m-1)+1)\pi]\\
&\quad \cap [(2m-1)\pi,(2m+1)\pi] = \{(2m-1)\pi\},\\
&\cos((2m-1)\pi - 2(m-1)\pi)\\
&\quad = \cos((2m-1)\pi - 2m\pi) = -1,\\
&\sin((2m-1)\pi - 2(m-1)\pi)\\
&\quad = \sin((2m-1)\pi - 2m\pi) = 0 \quad \text{for } m \in \mathbf{Z}
\end{aligned}
$$

であるから, 命題 5.3 に基いて次を定義することができる. ここで, $x \in (-2\pi, 2\pi)$ に対しては, 定義 5.2 のものに一致することを確認する必要があるが, これについては明らかであろう.

定義 5.3.

$$
\begin{aligned}
&\cos x = \cos(x-2m\pi),\ \sin x = \sin(x-2m\pi)\\
&\qquad \text{for } x \in [(2m-1)\pi,(2m+1)\pi],\ m \in \mathbf{Z}
\end{aligned}
$$

によって $\cos, \sin$ を $\mathbf{R}$ 上に拡張する. $\square$

定理 3.3, 命題 5.1, 命題 5.2, 命題 5.3 を用いると, この定義に従って次が成り立つことが証明できるが, ここでは証明は省略する.

定理 5.1. $\cos, \sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して次が成り立つ.

(i) $$\cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x,$$
$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \quad \text{for } x \in \mathbf{R}.$$

(ii) $$\begin{aligned}\cos x &= \sin\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big) = \sin\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big)\\ &= -\cos(x+\pi) = \cos(x+2\pi),\\ \sin x &= \cos\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big) = -\cos\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big)\\ &= -\sin(x+\pi) = \sin(x+2\pi)\\ &\qquad \text{for } x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

特に, $\cos, \sin$ は周期 2π の周期関数である.

(iii) $\cos, \sin$ は $\mathbf{R}$ 上で C^1-級であり,
$$[\cos]'(x) = -\sin x,\ [\sin]'(x) = \cos x \quad \text{for } x \in \mathbf{R}.$$

(iv) $m \in \mathbf{Z}$ に対し, $\cos$ は $[(2m-1)\pi, 2m\pi]$ 上で狭義単調増加, $[2m\pi, (2m+1)\pi]$ 上で狭義単調減少, $\sin$ は $\Big[\Big(2m - \frac{1}{2}\Big)\pi, \Big(2m + \frac{1}{2}\Big)\pi\Big]$ 上で狭義単調増加, $\Big[\Big(2m + \frac{1}{2}\Big)\pi, \Big(2m + \frac{3}{2}\Big)\pi\Big]$ 上で狭義単調減少である.

(v) $$\cos x = 0 \iff x = \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\pi,\ m \in \mathbf{Z},$$
$$\sin x = 0 \iff x = m\pi,\ m \in \mathbf{Z}.$$ $\square$

定理 5.1 (v) により,
$$\cos x \neq 0 \quad \text{for } x \in \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \Big(\Big(m - \frac{1}{2}\Big)\pi, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\pi\Big)$$
であるから, 定理 3.3 (i) に基き, 正接関数 $\tan$ を次のように $\bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \Big(\Big(m - \frac{1}{2}\Big)\pi, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\pi\Big)$ 上に拡張することができる.

定義 5.4. $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{for } x \in \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \Big(\Big(m - \frac{1}{2}\Big)\pi, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\pi\Big)$$
によって $\tan$ を $\bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \Big(\Big(m - \frac{1}{2}\Big)\pi, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\pi\Big)$ 上に拡張する. $\square$

このとき, 定理 5.1 によって次が成り立つ.

定理 5.2. $\tan : \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \Big(\Big(m - \frac{1}{2}\Big)\pi, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\pi\Big) \to \mathbf{R}$ に対して次が成り立つ.

(i) $$\tan(-x) = -\tan x,\ \tan x = \tan(x+\pi)$$
$$\text{for } x \in \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \Big(\Big(m - \frac{1}{2}\Big)\pi, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\pi\Big).$$

(ii) $m \in \mathbf{Z}$ に対し, $\tan$ は $\Big(\Big(m - \frac{1}{2}\Big)\pi, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\pi\Big)$ 上で C^1-級であり,
$$[\tan]'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2 > 0$$
$$\text{for } x \in \Big(\Big(m - \frac{1}{2}\Big)\pi, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\pi\Big).$$

特に, $\tan$ は $\Big(\Big(m - \frac{1}{2}\Big)\pi, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\pi\Big)$ 上で連続かつ狭義単調増加である.

証明. (ii) のみ示す.

$m \in \mathbf{Z}$ とすると, 定理 5.1 (i), (iii) 及び定理 2.2 (iii) によって
$$\begin{aligned}1 + (\tan x)^2 &= 1 + \Big(\frac{\sin x}{\cos x}\Big)^2 = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2}\\ &= \frac{1}{(\cos x)^2} > 0,\\ [\tan]'(x) &= \Big[\frac{\sin}{\cos}\Big]'(x)\\ &= \frac{1}{(\cos x)^2}\{[\sin]'(x)(\cos x)\\ &\qquad - (\sin x)[\cos]'(x)\}\\ &= \frac{1}{(\cos x)^2}((\cos x)^2 + (\sin x)^2)\\ &= \frac{1}{(\cos x)^2}\\ &\text{for } x \in \Big(\Big(m - \frac{1}{2}\Big)\pi, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\pi\Big)\end{aligned}$$
が成り立つ. $\square$

6. 三角関数の拡張と加法定理

次に, $\mathbf{R}$ 上に拡張された余弦関数, 正弦関数に対する加法定理を証明する. まず, $(-\pi, \pi)$ 上でこれを示す.

補題 6.1. $x_0, x_1 \in (-\pi, \pi)$ が

(i) $x_0, x_1, x_0 + x_1 \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)$,

(ii) $x_0 \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)$, $x_1, x_0 + x_1 \in (0, \pi)$,

(iii) $x_1\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $x_0, x_0+x_1 \in (-\pi,0)$,

(iv) $x_0 \in \left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$, $x_1 \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$

のいずれかをみたすならば,

$$\cos(x_0+x_1) = (\cos x_0)(\cos x_1) - (\sin x_0)(\sin x_1),$$
$$\sin(x_0+x_1) = (\sin x_0)(\cos x_1) + (\cos x_0)(\sin x_1)$$

が成り立つ.

証明. (i) 定理 4.1 による.

(ii) $x_0, x_1 - \frac{\pi}{2}, x_0+x_1-\frac{\pi}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ であり, 定理 5.1 (ii) によって

$$\cos x_1 = -\sin\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right),\ \ \sin x_1 = \cos\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\cos(x_0+x_1) = -\sin\left(x_0+x_1-\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\sin(x_0+x_1) = \cos\left(x_0+x_1-\frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つ. 従って, 定理 4.1 により,

$$\begin{aligned}\cos(x_0+x_1) &= -\sin\left(x_0+x_1-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\sin\left(x_0+\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= -(\sin x_0)\cos\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right)\\ &\quad -(\cos x_0)\sin\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -(\sin x_0)(\sin x_1)\\ &\quad -(\cos x_0)(-\cos x_1)\\ &= (\cos x_0)(\cos x_1)-(\sin x_0)(\sin x_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(x_0+x_1) &= \cos\left(x_0+x_1-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos\left(x_0+\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= (\cos x_0)\cos\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right)\\ &\quad -(\sin x_0)\sin\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= (\cos x_0)(\sin x_1)-(\sin x_0)(-\cos x_1)\\ &= (\sin x_0)(\cos x_1)+(\cos x_0)(\sin x_1)\end{aligned}$$

が得られる.

(iii) $x_1, x_0+\frac{\pi}{2}, x_0+x_1+\frac{\pi}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ であり, 定理 5.1 (ii) によって

$$\cos x_0 = \sin\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right),\ \ \sin x_0 = -\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\cos(x_0+x_1) = \sin\left(x_0+x_1+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\sin(x_0+x_1) = -\cos\left(x_0+x_1+\frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つ. 従って, 定理 4.1 により,

$$\begin{aligned}\cos(x_0+x_1) &= \sin\left(x_0+x_1+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \sin\left(\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)+x_1\right)\\ &= \sin\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(\cos x_1)\\ &\quad +\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(\sin x_1)\\ &= (\cos x_0)(\cos x_1)+(-\sin x_0)(\sin x_1)\\ &= (\cos x_0)(\cos x_1)-(\sin x_0)(\sin x_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(x_0+x_1) &= -\cos\left(x_0+x_1+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\cos\left(\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)+x_1\right)\\ &= -\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(\cos x_1)\\ &\quad +\sin\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(\sin x_1)\\ &= -(-\sin x_0)(\cos x_1)\\ &\quad +(\cos x_0)(\sin x_1)\\ &= (\sin x_0)(\cos x_1)+(\cos x_0)(\sin x_1)\end{aligned}$$

が得られる.

(iv) $x_0+x_1, x_0+\frac{\pi}{2}, x_1-\frac{\pi}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ であり, 定理 5.1 (ii) によって

$$\cos x_0 = \sin\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right),\ \ \sin x_0 = -\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\cos x_1 = -\sin\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right),\ \ \sin x_1 = \cos\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つ. 従って, 定理 4.1 により,

$$\begin{aligned}\cos(x_0+x_1) &= \cos\left(\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)+\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= \cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right)\\ &\quad -\sin\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= (-\sin x_0)(\sin x_1)\\ &\quad -(\cos x_0)(-\cos x_1)\\ &= (\cos x_0)(\cos x_1)-(\sin x_0)(\sin x_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(x_0+x_1) &= \sin\left(\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)+\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= \sin\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right)\\ &\quad +\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= (\cos x_0)(\sin x_1)\\ &\quad +(-\sin x_0)(-\cos x_1)\\ &= (\sin x_0)(\cos x_1)+(\cos x_0)(\sin x_1)\end{aligned}$$

が得られる. □

これより, 次が成り立つ.

命題 6.1. $x_0, x_1, x_0+x_1 \in (-\pi, \pi)$ ならば,

$$\cos(x_0+x_1) = (\cos x_0)(\cos x_1) - (\sin x_0)(\sin x_1),$$
$$\sin(x_0+x_1) = (\sin x_0)(\cos x_1) + (\cos x_0)(\sin x_1)$$

が成り立つ.

証明. $-\pi < x_0 \le x_1 < \pi$ と仮定してよい.

(i) もし, $x_0, x_1 \in \left(-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right]$ であると仮定すると, $x_0+x_1 \in (-2\pi, -\pi] \cap (-\pi, \pi) = \phi$ となり, 矛盾である.

(ii) $x_0 \in \left(-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right]$, $x_1 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき, $x_0+x_1 \in \left(-\dfrac{3\pi}{2}, 0\right) \cap (-\pi, \pi) = (-\pi, 0)$ であるから, 補題 6.1 (iii) の仮定がみたされ, 主張が得られる.

(iii) $x_0 \in \left(-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right]$, $x_1 \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ のとき, 補題 6.1 (iv) の仮定がみたされ, 主張が得られる.

(iv) $x_0, x_1 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき,

$$x_0+x_1 \in (-\pi, \pi) = (-\pi, 0) \cup \{0\} \cup (0, \pi)$$

である.

(a) $x_0+x_1 \in (-\pi, 0)$ のとき, $x_0 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ である. 実際, もし, $x_0 \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ ならば, $0 \le x_0 \le x_1$, $x_0+x_1 \ge 0$ となり, 矛盾である. 従って, 補題 6.1 (iii) の仮定がみたされ, 主張が得られる.

(b) $x_0+x_1 = 0$ のとき, 補題 6.1 (i) の仮定がみたされ, 主張が得られる.

(c) $x_0+x_1 \in (0, \pi)$ のとき, $x_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ である. 実際, もし, $x_1 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ ならば, $0 \ge x_1 \ge x_0$, $x_0+x_1 \le 0$ となり, 矛盾である. 従って, 補題 6.1 (ii) の仮定がみたされ, 主張が得られる.

(vi) もし, $x_0, x_1 \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ であると仮定すると, $x_0+x_1 \in [\pi, 2\pi) \cap (-\pi, \pi) = \phi$ となり, 矛盾である. □

次に, $(-2\pi, 2\pi)$ 上で余弦関数, 正弦関数の加法定理を考える.

補題 6.2. $x_0, x_1 \in (-2\pi, 2\pi)$ が

(i) $x_0, x_1, x_0+x_1 \in (-\pi, \pi)$,

(ii) $x_0 \in (-\pi, \pi)$, $x_1, x_0+x_1 \in (0, 2\pi)$,

(iii) $x_1 \in (-\pi, \pi)$, $x_0, x_0+x_1 \in (-2\pi, 0)$,

(iv) $x_0 \in (-2\pi, -\pi]$, $x_1 \in [\pi, 2\pi)$

のいずれかをみたすならば,

$$\cos(x_0+x_1) = (\cos x_0)(\cos x_1) - (\sin x_0)(\sin x_1),$$
$$\sin(x_0+x_1) = (\sin x_0)(\cos x_1) + (\cos x_0)(\sin x_1)$$

が成り立つ.

証明. (i) 命題 6.1 による.

(ii) $x_0, x_1-\pi, x_0+x_1-\pi \in (-\pi, \pi)$ であり, 定理 5.1 (ii) によって

$$\cos x_1 = -\cos(x_1-\pi), \quad \sin x_1 = -\sin(x_1-\pi),$$
$$\cos(x_0+x_1) = -\cos(x_0+x_1-\pi),$$
$$\sin(x_0+x_1) = -\sin(x_0+x_1-\pi)$$

が成り立つ. 従って, 命題 6.1 により,

$$\begin{aligned}
\cos(x_0+x_1) &= -\cos(x_0+x_1-\pi) \\
&= -\cos(x_0+(x_1-\pi)) \\
&= -(\cos x_0)\cos(x_1-\pi) \\
&\quad +(\sin x_0)\sin(x_1-\pi) \\
&= -(\cos x_0)(-\cos x_1) \\
&\quad +(\sin x_0)(-\sin x_1) \\
&= (\cos x_0)(\cos x_1) - (\sin x_0)(\sin x_1), \\
\sin(x_0+x_1) &= -\sin(x_0+x_1-\pi) \\
&= -\sin(x_0+(x_1-\pi)) \\
&= -(\sin x_0)\cos(x_1-\pi) \\
&\quad +(\cos x_0)\sin(x_1-\pi) \\
&= -(\sin x_0)(-\cos x_1) \\
&\quad +(\cos x_0)(-\sin x_1) \\
&= (\sin x_0)(\cos x_1) - (\cos x_0)(\sin x_1)
\end{aligned}$$

が得られる.

(iii) $x_1, x_0+\pi, x_0+x_1+\pi \in (-\pi, \pi)$ であり, 定理 5.1 (ii) によって

$$\cos x_0 = -\cos(x_0+\pi), \quad \sin x_0 = -\sin(x_0+\pi),$$
$$\cos(x_0+x_1) = -\cos(x_0+x_1+\pi),$$
$$\sin(x_0+x_1) = -\sin(x_0+x_1+\pi)$$

が成り立つ. 従って, 命題 6.1 により,

$$\begin{aligned}
\cos(x_0+x_1) &= -\cos(x_0+x_1+\pi) \\
&= -\cos((x_0+\pi)+x_1) \\
&= -\cos(x_0+\pi)(\cos x_1) \\
&\quad +\sin(x_0+\pi)(\sin x_1) \\
&= -(-\cos x_0)(\cos x_1) \\
&\quad +(-\sin x_0)(\sin x_1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\cos x_0)(\cos x_1) - (\sin x_0)(\sin x_1),\\
\sin(x_0+x_1) &= -\sin(x_0+x_1+\pi)\\
&= -\sin((x_0+\pi)+x_1)\\
&= -\sin(x_0+\pi)(\cos x_1)\\
&\quad -\cos(x_0+\pi)(\sin x_1)\\
&= -(-\sin x_0)(\cos x_1)\\
&\quad -(-\cos x_0)(\sin x_1)\\
&= (\sin x_0)(\cos x_1) - (\cos x_0)(\sin x_1)
\end{aligned}
$$

が得られる.

(iv) $x_0+x_1, x_0+\pi, x_1-\pi \in (-\pi,\pi)$ であり, 定理 5.1 (ii) によって

$$
\begin{aligned}
&\cos x_0 = -\cos(x_0+\pi),\ \sin x_0 = -\sin(x_0+\pi),\\
&\cos x_1 = -\cos(x_1-\pi),\ \sin x_1 = -\sin(x_1-\pi)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 従って, 命題 6.1 により,

$$
\begin{aligned}
\cos(x_0+x_1) &= \cos((x_0+\pi)+(x_1-\pi))\\
&= \cos(x_0+\pi)\cos(x_1-\pi)\\
&\quad -\sin(x_0+\pi)\sin(x_1-\pi)\\
&= (-\cos x_0)(-\cos x_1)\\
&\quad -(-\sin x_0)(-\sin x_1)\\
&= (\cos x_0)(\cos x_1) - (\sin x_0)(\sin x_1),\\
\sin(x_0+x_1) &= \sin((x_0+\pi)+(x_1-\pi))\\
&= \sin(x_0+\pi)\cos(x_1-\pi)\\
&\quad +\cos(x_0+\pi)\sin(x_1-\pi)\\
&= (-\sin x_0)(-\cos x_1)\\
&\quad -(-\cos x_0)(-\sin x_1)\\
&= (\sin x_0)(\cos x_1) - (\cos x_0)(\sin x_1)
\end{aligned}
$$

が得られる. □

これを用いると, 命題 6.1 と同様にして次が得られるが, 証明は省略する.

命題 6.2. $x_0, x_1, x_0+x_1 \in (-2\pi, 2\pi)$ ならば,

$$
\begin{aligned}
\cos(x_0+x_1) &= (\cos x_0)(\cos x_1) - (\sin x_0)(\sin x_1),\\
\sin(x_0+x_1) &= (\sin x_0)(\cos x_1) + (\cos x_0)(\sin x_1)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. □

以上を用いることにより, 次が得られる.

定理 6.1. (三角関数の加法定理) (i)

$$
\begin{aligned}
\cos(x_0+x_1) &= (\cos x_0)(\cos x_1) - (\sin x_0)(\sin x_1),\\
\sin(x_0+x_1) &= (\sin x_0)(\cos x_1) + (\cos x_0)(\sin x_1)
\end{aligned}
$$

$$\text{for } x \in \mathbf{R}.$$

(ii) $x_0, x_1, x_0+x_1 \in \bigcup_{m\in\mathbf{Z}} \left(\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi, \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$ ならば, $(\tan x_0)(\tan x_1) \neq 1$ かつ

$$\tan(x_0+x_1) = \frac{\tan x_0 + \tan x_1}{1-(\tan x_0)(\tan x_1)}.$$

証明. (i)
$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \bigcup_{m\in\mathbf{Z}} ((2m-1)\pi, (2m+1)\pi]\\
&= \bigcup_{m\in\mathbf{Z}} [(2m-1)\pi, (2m+1)\pi)
\end{aligned}
$$

であるから, $x_0, x_1 \in \mathbf{R}$ とすると, $m_0, m_1 \in \mathbf{Z}$ が存在して,

$$
\begin{aligned}
&x_0 \in ((2m_0-1)\pi, (2m_0+1)\pi],\\
&x_1 \in [(2m_1-1)\pi, (2m_1+1)\pi)
\end{aligned}
$$

をみたす. このとき,

$$x_0+x_1 \in (2(m_0+m_1-1)\pi, 2(m_0+m_1+1)\pi)$$

であり,

$$
\begin{aligned}
&x_0-2m_0\pi \in (-\pi,\pi] \subset (-2\pi, 2\pi),\\
&x_1-2m_1\pi \in [-\pi,\pi) \subset (-2\pi, 2\pi),\\
&(x_0-2m_0\pi)+(x_1-2m_1\pi)\\
&\quad = x_0+x_1-2(m_0+m_1)\pi \in (-2\pi, 2\pi)
\end{aligned}
$$

であるから, 定理 5.1 (ii), 命題 6.2 を用いると,

$$
\begin{aligned}
\cos(x_0+x_1) &= \cos(x_0+x_1-2(m_0+m_1)\pi)\\
&= \cos((x_0-2m_0\pi)+(x_1-2m_1\pi))\\
&= \cos(x_0-2m_0\pi)\cos(x_1-2m_1\pi)\\
&\quad -\sin(x_0-2m_0\pi)\sin(x_1-2m_1\pi)\\
&= (\cos x_0)(\cos x_1) - (\sin x_0)(\sin x_1),\\
\sin(x_0+x_1) &= \sin(x_0+x_1-2(m_0+m_1)\pi)\\
&= \sin((x_0-2m_0\pi)+(x_1-2m_1\pi))\\
&= \sin(x_0-2m_0\pi)\cos(x_1-2m_1\pi)\\
&\quad +\cos(x_0-2m_0\pi)\sin(x_1-2m_1\pi)\\
&= (\sin x_0)(\cos x_1) + (\cos x_0)(\sin x_1)
\end{aligned}
$$

が得られる.

(ii)
$$
\begin{aligned}
&x_0, x_1, x_0+x_1\\
&\quad \in \bigcup_{m\in\mathbf{Z}} \left(\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi, \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right)
\end{aligned}
$$

とすると, 定理 5.1 (v) によって $\cos x_0 \neq 0, \cos x_1 \neq 0, \cos(x_0+x_1) \neq 0$ であるから, (i) を用いると,

$$
\begin{aligned}
0 &\neq \frac{\cos(x_0+x_1)}{(\cos x_0)(\cos x_1)}\\
&= \frac{1}{(\cos x_0)(\cos x_1)}\\
&\quad \cdot ((\cos x_0)(\cos x_1) - (\sin x_0)(\sin x_1))
\end{aligned}
$$

$$= 1 - \frac{\sin x_0}{\cos x_0}\frac{\sin x_1}{\cos x_1} = 1 - (\tan x_0)(\tan x_1)$$

となり, $(\tan x_0)(\tan x_1) \neq 1$ が得られる. 更に,

$$\begin{aligned}
\tan(x_0 + x_1) &= \frac{\sin(x_0 + x_1)}{\cos(x_0 + x_1)} \\
&= \frac{(\sin x_0)(\cos x_1) + (\cos x_0)(\sin x_1)}{(\cos x_0)(\cos x_1) - (\sin x_0)(\sin x_1)} \\
&= \frac{\dfrac{\sin x_0}{\cos x_0} + \dfrac{\sin x_1}{\cos x_1}}{1 - \dfrac{\sin x_0}{\cos x_0}\dfrac{\sin x_1}{\cos x_1}} \\
&= \frac{\tan x_0 + \tan x_1}{1 - (\tan x_0)(\tan x_1)}
\end{aligned}$$

が成り立つ. □

文献.

小平邦彦 (1991),
解析入門, 岩波基礎数学選書, 岩波書店.

黒田成俊 (2002),
微分積分, 共立講座 21 世紀の数学 1, 共立出版.

三村征雄 (1970),
微分積分学 I, 岩波全書, 岩波書店.

赤攝也 (2014),
微分学, 微分積分学 I, 日本評論社.

砂田利一 (2017),
基幹講座 数学 微分積分, 東京図書.

（令和元年 9 月27日受理）