数学的活動を支える数学的経験と技能を与える教師教育カリキュラムの一考察

田谷　久雄

On teachers education curriculum to give mathematical experiences and skills to support mathematical activities

TAYA Hisao

概要

新学習指導要領では「数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力」を育成することが掲げられている．それを実現するためには，教師自身の数学的経験や技能が重要であることは言うまでもないが，それらの経験や技能が十分であるとは必ずしも言えない．本稿では，教科書で取り上げられている命題をもとに，教師自身がそこから新たな問題を提起し，それを解決していくことで，総合的・発展的に考えることを経験し，学問として体系化された数学を再認識すると共に，教師自身の数学的な見方・考え方の理解を深めることに資する，数学的経験と技能を養う教師教育カリキュラムの一考察について述べる．

Key words: teachers education curruculum (教師教育カリキュラム), mathematical activites (数学的活動), 数学的経験と技能 (mathematical experiences and skills)

I　序

小学校から高等学校までのすべての新学習指導要領 [Mo17a]，[Mo17b]，[Mo18] において，「数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力」を育成することが目標として掲げられている．これを実現するためには，数学的活動に基づいた学校での授業カリキュラムを開発するだけでなく，不十分な児童生徒の考え方を生かして授業をすることができる教師の育成が必要である．本稿では，本学の今年度重点支援研究「算数教育に関する専門性の一層の向上を目指す教師教育カリキュラムの開発ならびにその効果に関する臨床的研究：数学的経験に着目して」（研究代表者：市川啓）の考え方に基づき，同研究に係る体験型講習や今年度の本学での講義，および，今年度の本吉地方中学数学研究部会での講演を踏まえて，教師自身が数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を行い，数学的に考えることについて再考し，その資質・能力を深めるための教師教育カリキュラムについて具体的な例を通して考えていく．こうしたカリキュラムの中で，教師自身が総合的・発展的に考えるという数学的活動を経験し，大学で学ぶ体系化された学問としての数学を再確認すると共に，教師自身の数学的な見方・考え方の理解を深め，小学校から高等学校までの新学習指導要領の算数科・数学科の目標，とくに「総合的・発展的に考察する力」を養うことで「数学的に考える資質・能力」を育むための，教師としての児童・生徒に対する数学的活動に繋げていければと考えている．

II　提示する問題

中学校数学の教科書 [Ke15] や [To15] では次のような問題（例や例題）が取り上げられてい

る（この問題は自然数を整数としても成り立つ命題であるが，小学校教員も含めることを念頭に自然数として扱うこととする）．

問 II.1 2 桁の自然数と，その数の十の位と一の位の数を入れ替えてできる数との和は，11 の倍数であることを示せ．

この問題は，10 進の位取記数法を利用し数を表現することと，文字式の計算ができれば示すことができる．具体的には，x を十の位の数，y を一の位の数として，2 桁の自然数を $10x+y$ と表せれば，加えるもう一つの自然数は $10y+x$ となるので，

$$(10x+y)+(10y+x)=11(x+y)$$

により，$x+y$ が整数であることから，2 つの数の和が 11 の倍数であることがわかる．小学生に証明は難しいが，例えば $x=5$, $y=7$ という具体的な値に対して，上の計算式を筆算の形で（あえて和を 2 行で表し），

$$\begin{array}{rrrr} & & 5 & 7 \\ +) & & 7 & 5 \\ \hline & & 1 & 2 \\ +) & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

と書き表せば，

$$\begin{array}{rrrr} & & 1 & 2 \\ \times) & & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 2 \\ +) & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

と比較して，その原理を理解する児童もいることだろう．実際に，平成 29 年度全国学力・学習状況調査 [Ko17] の小学校算数 B の $\boxed{1}$ の (3) では，(考え方は異なるが) 数学的な考え方をみる問題として，問 II.1 における「2 つの数の和」を「2 つの数の差」として観察できる性質の一部が出題されている（§ V に後述する命題 V.1 や命題 V.3 につながる問題でもあり，§ V でも触れている）．

さて，この問題を出発点として，教師教育プログラムの一つを考えてみる．やり方は，2 桁の自然数の問題を参考にし，3 桁や 4 桁の自然数について “同様な操作” によって得られる数がどのような性質をもつかを調べ，成り立つと思われる命題を予測し，それを証明するというプロセスを実行する．つまり，問題を見つけて，命題を予測し，それを実際に示すのである．問題の設定は自由なのでいろいろな拡がりが考えられる．そこで，教師自身が数学的な見方・考え方を働かせ，総合的・発展的に考えるという経験をしながら数学的な活動を行うことによって，自身の数学的に考える資質・能力を深めようという訳である．

グループで行えば，お互いの見方・考え方を交換することによって，それぞれの発想や分かり方を知り，さらに深まりのある活動となるが，これはまさに理数系の大学院でセミナーとして行われている研究手法に他ならない．

III　カリキュラムの一例

問 II.1 が出発点であるが，そもそもこの問題が理解できていなければ，次に何をすべきか見当がつかないであろう．そこで，まずこの問題自身に求められる数学的活動を理解してもらうことから始める．簡単ではあるが，基本的に以下の流れでそれを行う．この流れ自体，児童・生徒も経験する初等的な数学的活動の一つである．

(1) 2 つの自然数を思い浮かべてもらい，その数と，その数の位を入れ替えた数との和を計算してもらう．
(2) 同じことを何度か繰り返してもらい，和にはどのような性質があるか観察してもらう．
(3) 観察した結果，成り立つと思われる命題を書いてもらう．
(4) それを実際に証明してもらう．

この流れの (3) の過程では，命題がどのような文章で表現されているのか（日本語の文章だけで表現されているのか，式や文字を利用して表現されているのかなど），自分の表現と他の人の表現を比べることで数学的な表現方法の豊かさも実感してもらう．どの表現が一番良いかという問題ではなく，正しい表現であればすべ

て平等に良いのである．また，証明では前節のように文字式を利用することになるが（有限個なのでしらみつぶしでも証明はできる），前節の 57＋75 の筆算による表現での説明のように，小学校算数での計算でもそれが 11 の倍数であることが理解できること（位をずらして同じ数を加えているので 11 の倍数であること）を再認識してもらうことは，初等的な範囲で数学的に考えることとして面白いことである．

さて，これをもとに実際に考えてもらう問題は以下の通りである．

問 III.1 3 桁の自然数について，同様な操作によって得られる数がどんな性質をもつか調べ，成り立つと予想される性質を命題として記述し，それを証明してみよう．

問 III.2 さらに 4 桁以上の自然数についても同様な考察を行い，成り立つと予想される命題を記述し，それを証明してみよう．

ここで，“同様な操作”や“同様な考察”としているのは，すでに出てきた見方・考え方や手法を固定せず，自由度を与えて新しい展開を見つけ出し，数学的な見方・考え方を拡げていくことを手助けために用いている表現である．

なお，問題を検討する以前では，すべての 3 桁の自然数（または 3 桁以上の自然数）について成り立つ命題があるかどうかはわからないので，何らかの条件を課すことで成り立つ命題も含めて，何でもよいから問題を見つけてみることとし，否定されてもそれは一つの結論である，ということを伝えておく．そして，予測した命題が証明できれば，それは自分（達）が発見した定理が得られたことになる．

IV　予想命題（その１）

さて，実際に問 III.1 を考えてもらうとき，不確かな表現である“同様な操作”とは何かが問題となる．しかし，それを考えることはこの問題において大切な数学的活動の一つなのである．

まず，もとの数から別の数を作る操作に関しては，一番ストレートな発想として，「もとの数と，その数の位の数を逆に並び替えてできる数との和」が考えられる．たとえば，

$$123+321=444=2^2\cdot 3\cdot 37,$$
$$314+413=727\ (\text{これは素数！})$$

がそうである．しかし，この 2 つの例を眺めれば共通の約数はないので，「どんな 3 桁の自然数についても，もとの数と，その数の位の数を逆に並び替えてできる数との和がある数の倍数になる」という命題は成り立たないことがわかる．つまり，否定的な結果になってしまった．しかしながら，これも立派な一つの命題である．

一つの発想がそこで止まっても，数学的な見方・考え方から改めて“同様な操作”について検討してもらうとともに，見方・考え方が固定されてしまった者については「何らかの条件を課すことで成り立つ命題」についても検討するよう促すことにする．

さて，最初の「もとの数と，その数の十の位と一の位の数を入れ替えてできる数」を得るという操作と“同様な操作”については，次のようなものを想定することができるであろう．

(1) もとの数と，その数の位の数を逆に並び替えてできる数の，2 つの数．たとえば，314 と 413 という 2 つの数．
(2) もとの数と，その数のどこか 2 つの位の数を入れ替えてできる数の，2 つの数．これは (1) の 314 と 413 という 2 つの数も含むが，それ以外に 314 と 134，または，314 と 341 という 2 つの数．
(3) もとの数と，その数の各位の数を順に一桁ずつずらしてできる 2 つの数の，合計 3 つの数．たとえば，123 と 231 と 312 という 3 つの数．
(4) もとの数と，もとの数の位の数を並び替えてできるすべての数の，合計 6 つの数．たとえば，123，132，213，231，312，321 の 6 つの数．

これらについて，何らかの演算を考えてどのような性質が成り立つかを検討し，成り立つ命題を予測し，それを証明するという数学的経験を行う．

上であげた 3 桁の自然数から別の自然数を作り出す方法の基本は，(4) をみれば想像がつくと思うが，3 つの数の置換を考えることである．つまり，これは 3 個の順列を考えることであり，さらに言い換えれば，もとの数から 3 次対称群 S_3 の作用によって得られる数を考えることでもあり，その新たな数を作るという操作は写像と捉えることもできる．たとえば，(2) のように 2 つの位の数を入れ替えることは互換の作用に相当し，(3) のように位の数を順に一つずつずらしてできる数を得ることは 3 次交代群の元を作用させせることに相当する（よって 3 回目でもとの並びに戻る）．たとえば，314 という自然数を $(3, 1, 4)$ という順序をもった数の組と考えて，$\sigma = (1\ 2)$ という互換（順序を持った数の組の 1 番目と 2 番目の数の位置を変えるという置換）を施せば，$\sigma((3, 1, 4)) = (1, 3, 4)$ となり．これを自然数に戻せば 134 となるわけである：

$$\begin{aligned} 314 \quad &\longmapsto \quad (3, 1, 4) \\ &\underset{\sigma=(1\ 2)}{\longmapsto} \quad \sigma((3, 1, 4)) \\ &= \quad (1, 3, 4) \\ &\longmapsto \quad 134 \end{aligned}$$

つまり，順列組み合わせから始まり，写像の概念や，群論において非可換群として代表的な対称群とその作用という見方や考え方を確認することもできる．こういった確認は中学校や高等学校の教員にとっては有益な再確認であろうし，小学校の教員にとっても一年生の一番最初に日本語を用いずに登場するものとものとの対応や高学年での変化などを指導する際の説明や表現の工夫においては役立つことであろう．

次に，こうして得られた数の組に対して “同様な操作” の続きとして何らかの演算を行うことを考える．問 II.1 ではそれは和であった．ここでは，和と差を念頭に考えてみる．なお，約数・倍数の性質を考える場合，積や商の演算を行うことは個々の数について考察することに帰着されるので，和と差を考えることは妥当な選択肢である．また，“差” を考えるということを思い付くことも 2 項演算という概念の大枠として和が捉えられているかの再確認に繋げることができるであろう．というのも，中学校教員向けの講演での経験によれば，差をとるという発想自体も簡単に出てくることではないようだったからである．

実際に，教員（小学校教員）や学生（宮城教育大学の理数系の中高教員を目指す学生）を対象にこの問題を提示し，予測として出てきた予想命題は次の通りである．

予想 IV.1 (1) 3 桁の自然数と，その数の端の桁の数を入れ替えてできる数との和は，11 の倍数になるとは限らない．

(2) 3 桁の自然数と，その数の端の桁の数を入れ替えてできる数との和は，111 の倍数になることがある．

(3) 3 桁の自然数と，その数の端の桁の数を入れ替えてできる数との差は，11 の倍数（99 の倍数）になる．

(4) 3 桁の自然数と，その数の各位の数を順に一桁ずつずらして得られる数の，合計 3 つの数の和は，111 の倍数になる．

(5) 3 桁の自然数と，その数の百の位と十の位の数を入れ替えてできる数との和は，11 の倍数にならないようだ．

(6) 3 桁の自然数と，その数の位の数を並び替えてできるすべての数の，合計 6 つの数の和は，111 の倍数である．

さらに，これらの予想命題（とくに予想 IV.1 の (2) や (6)）の証明を試みながら次のような予想命題も出された．

予想 IV.2 (1) 連続する 3 つの数が降順または昇順で百の位から順に並んでいる自然数について，その数と，その数の位の数を逆に並び替えてできる数との和は，111 の倍数（もとの数の真ん中の位の数の 222 倍）である．

(2) 3 桁の自然数について，百の位と一の位の和が十の位の 2 倍に等しければ，その数と，その数の位の数を逆に並び替えてできる数との和は，111 の倍数になる．

(3) 4 桁の自然数について，千の位と一の位の和が百の位と十の位の和に等しければ，その数と，その数の位の数を逆に並び替

えてできる数との和は，1111 の倍数になる．

(4) n 桁の自然数と，その数の位の数を並び替えてできるすべての数の，合計 $n!$ 個の数の和は，$\underbrace{111\cdots111}_{n\text{ 個}}$ の倍数である．

以上の予想は一例と言えるが，これらの予想のために，または，予想を証明するために目的をもって計算を行うことは，意味のない数についての計算練習とは異なり，実施者の数学的経験を豊かなものにしていることは確かであろう．また，予想 IV.2 をよく眺めてみると，(1) は (2) に含まれる主張であることに気づく．実際に，連続する 3 つの数を $a-1$, a, $a+1$ とし，これらの数をこの順で百の位の数から一の位の数となる 3 桁の自然数を考えれば，$(a-1)+(a+1)=2a$ という関係が成り立っている．こういうことに気づくことも数学的経験に基づく数学的な見方・考え方の習得に繋がる．

さて，上の予想命題の中で実際に証明が提案されたものは，予想 IV.1 の (6) とその一般化の予想 IV.2 の (4)，および，予想 IV.2 の (2) である．前の 2 つは本学大学生により，最後の一つは小学校教員のグループにより辿り着いたものである．以下，簡単にその証明を紹介し，コメントを述べていく．

(予想 IV.1 の (6) の証明) 百の位の数を x, 十の位の数を y，一の位の数を z として，3 桁の自然数を $100x+10y+z$ とする．このとき，位の数の並び替えでできる数は，$100x+10z+y$, $100y+10x+z$，$100y+10z+x$，$100z+10x+y$, $100z+10y+x$ であり，もとの数とこれらの数の合計 $6=3!$ 個の数の和は，

$$\begin{aligned}&2\cdot(100+10+1)x\\&\quad+2\cdot(100+10+1)y\\&\qquad+2\cdot(100+10+1)z\\&=2\cdot 111\cdot(x+y+z)\end{aligned}$$

となる．$2(x+y+z)$ は整数であるので，この和は 111 の倍数である． □

(予想 IV.2 の (4) の証明) はじめの n 桁の自然数を $\sum_{i=0}^{n-1} a_i\cdot 10^i$ とする．つまり，

$$a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0$$

である．ただし，a_i は $0\leq a_i\leq 9$ をみたす整数である．もとの数を含めて位の数の並び替えでできる数は全部で $n!$ 個あり，それらの数において各位に同じ数が $(n-1)!$ 個だけ現れるので（読者は要確認），それらの数の和は，

$$\begin{aligned}&(n-1)!\times(a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+a_0)\\&\qquad\times(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)\\&\qquad\qquad=(n-1)!\cdot\underbrace{111\cdots111}_{n\text{ 個}}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}a_i\end{aligned}$$

となる．よって，合計 $n!$ 個の数の和は確かに $\underbrace{111\cdots111}_{n\text{ 個}}$ の倍数である． □

一般に n 桁の自然数を考えるときにも，位の数を x, y, z，$\cdots$ など単一の文字で表すことは構わないが，数列の記述で登場した下付きを伴う記号 a_1, a_2, a_3，$\cdots$ を利用することで，見通しが良くなることが理解できると思う．このようなイメージをもって説明ができれば，添え字を伴う記号を用いることができない児童や生徒への説明にも想像力を働かせた活動ができることは容易に想像がつくことである．また，3 桁や 4 桁などの固定された桁についての主張を扱っている段階では，どの主張も高々有限個の自然数について調べればその主張の成否は確認できるため，力ずくで示すこともできると言える（計算機でプログラミングを行えばさらに簡単にそれが実行できる）が，一般の n 桁の自然数を扱うことは無数の自然数についてその予想の成否を検討しなくてはならず，その成否がわかることはまさに数学による考察の力そのものであると言っても過言ではない．

(予想 IV.2 の (2) の証明) 百の位の数を x, 十の位の数を y，一の位の数を z として，自然数を $100x+10y+z$ とする．このとき，その数の位の数を逆に並び替えてできる数は $100z+10y+x$ である．よって，考える数の和は $101x+20y+101z$ である．ここで，仮定より $x+z=2y$ で

あるので，この 2 つの数の和は，

$$\begin{aligned}101x + 20y + 101z &= 101(x+z) + 20y\\ &= 202y + 20y\\ &= 222y = 2 \cdot 111 \cdot y\end{aligned}$$

となる．よって，その和は 111 の倍数（真ん中の位の数の 222 倍）であることがわかる． □

教員（小学校教員）や学生（中高の理数系教員を目指す宮城教育大学学生）を対象に行ったときには，これらの証明は黒板に板書の上，個人またはグループとして皆の前での発表という形式で説明をしてもらった．

そのとき，予想 IV.2 の (4) については，こちらとのやり取りの中で，n 桁では

$$(n-1)! \cdot \underbrace{111\cdots111}_{n\text{ 個}}$$

の倍数になることに気づき，証明した命題を次のようにより一般的な形とした．

命題 IV.3 n 桁の自然数について，その数と，その数の位の数を並び替えてできるすべての数の，合計 $n!$ 個の自然数の和は，$(n-1)! \cdot \underbrace{111\cdots111}_{n\text{ 個}}$ の倍数である．

目的の命題の証明を与えただけでなく，さらにその証明を見直すことで，より一般的な命題が証明できていることに気が付いた例である．単純な計算や今まで持っていた数学的な見方・考え方だけでは予想できなかった命題が，自身の数学的経験と少しのやり取りによって命題として認識できたことになる．

予想 IV.2 の (2) については，予想 IV.2 の (1) を含むということを認識した上で発表が行われたが，板書の中で，百の位を x, 十の位を y，一の位を z とするとき，

$$x + z = 2y \Longleftrightarrow \text{その和は 111 の倍数}$$

が成り立つという記述がみられた（これが実際に正しいことは § VI で示す）．しかし，実際に証明していることは，「$x + z = 2y$ のとき」という仮定の上での議論だけであり，命題として書いている数学的事実と証明している事実が同じでないこと，言い換えれば，考えている内容が正確に表現できていない，または，証明していることが正確に把握できてない可能性のあることが伺えた．したがって，教師同士でこのような機会を設けて，お互いの主張と板書上の記述の内容についてや，主張したいこととその数学的論証の仕方が正しいかどうかについて検討し合うことはとても重要なことだと感じた．

V　予想命題（その２）

ここでは，実際にはそのような展開にはならなかったが，当初想定した展開のうち一般の桁についても主張が拡張できる命題について触れておく．

2 桁の自然数を参考に 3 桁の自然数について考えた場合,「もとの数と，その数の位の数を逆に並び替えてできる数との和はどんな数の倍数になるか」という問題を考えることは自然である．しかし，それができないことは § IV の冒頭で説明した通りである．

そこで,「押しでもダメなら引いてみな」を教訓に，別の 2 項演算を想像し「足しでもダメなら引いてみな」を実行すると，予想 IV.1 の (3) の主張が予測できる．いくつかの計算例をもとにこのことが予測できれば，それを証明することは文字式の計算を使えば難しいことは何もない．実際に，百の位を x, 十の位を y，一の位を z として，3 桁の自然数を $100x+10y+z$ とすると，考える 2 つの数の差は $99x-99z = 99(x-z)$ である．よって，その差は 11 の倍数（99 の倍数）であることがわかる．

次に，4 桁の自然数について，もとの数の位の数を逆に並び替えてできる数との関係を考えると，今度は和をとることで 11 の倍数となることが予測できる（この場合には 99 の倍数になるとは限らない．たとえば，$3452 + 2543 = 5995 = 5 \cdot 11 \cdot 109$ となる）．さらに，5 桁の自然数については差をとることで再び 11 の倍数（99 の倍数）となることが予測できる．

そうなると，与えられた数と，その数の位の数を逆に並び替えてできる数について，偶数桁であれば和をとることで，奇数桁であれば差を

とることで，共に 11 の倍数となることが予測できる．そして，実際にそれが正しいことを示すことができる．つまり，次の命題が成り立つ．

命題 V.1 a を自然数，b を a の位の数を逆に並び替えてできる数とするとき，次が成り立つ．

(1) a が偶数桁ならば，$a+b$ は 11 の倍数である．
(2) a が奇数桁ならば，$a-b$ は 11 の倍数（99 の倍数）である．

11 の倍数であることだけに注目すれば，桁数による場合分けを行わずに，上の命題は次のように述べることもできる．これは数学的な表現による事象の処理の簡潔化である．

命題 V.2 n を自然数とし，a を n 桁の自然数，b を a の位の数を逆に並び替えてできる数とする．このとき，$a+(-1)^n b$ は 11 の倍数である．

一般の n に関する命題 V.1 も，10 のベキ 10^i を 11 で割った余りを考察すれば，文字式を利用することで証明を与えることができるが，実質的に偶数桁と奇数桁で場合分けを行うことや，10 のベキを 11 で割った余りが桁数に応じて変わる状況に目を向ける必要があるため，数学的な見方・考え方が不十分であれば，一般の n について命題を示すことは容易ではないだろう．しかしながら，そういった証明の方針を見つける活動そのものが数学的活動であり，とくにこのことは 11 の倍数の判定法を見つけることにも繋がる題材でもある．

証明は等式に基づいて厳密に行えばかなり煩雑なものになるが，大学の数学で学ぶ「数の合同」の概念を利用すれば，その証明は以下の通り簡単なものである（数学的な表現技法の獲得により証明が簡明になるのである）．

(命題 V.1 の証明) n 桁の自然数 a を

$$a=\sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i \quad (0 \le a_i \le 9 : \text{整数})$$

と表す．このとき，$b=\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-1-i}10^i$ となる．ここで，

$$10^i=(11-1)^i \equiv (-1)^i \pmod{11}$$

が成り立つことを注意しておく．

まず，a が偶数桁，つまり，n が偶数であれば，

$$a \equiv -a_{n-1}+a_{n-2}\cdots-a_1+a_0 \pmod{11}$$
$$b \equiv -a_0+a_1\cdots-a_{n-2}+a_{n-1} \pmod{11}$$

であるので，$a+b\equiv 0 \pmod{11}$ を得る．よって，その和は 11 の倍数である．

a が奇数桁，つまり，n が奇数であれば，

$$a \equiv a_{n-1}-a_{n-2}\cdots-a_1+a_0 \pmod{11}$$
$$b \equiv a_0-a_1\cdots-a_{n-2}+a_{n-1} \pmod{11}$$

となるので，$a-b\equiv 0 \pmod{11}$ を得る．よって，その差は 11 の倍数であることがわかる．

さらに，$10^i=(9+1)^i\equiv 1 \pmod 9$ であることより，偶数桁であるか奇数桁であるかにかかわらず，

$$a \equiv a_{n-1}+a_{n-2}\cdots+a_1+a_0 \pmod 9$$
$$b \equiv a_0+a_1\cdots+a_{n-2}+a_{n-1} \pmod 9$$

となるので，$a-b\equiv 0 \pmod 9$ を得る．

以上より，a が奇数桁であれば，11 と 9 が互いに素であることから $a-b$ が 99 の倍数であることもわかる． □

上の命題の証明における法 9 での計算より，次のことも副産物としてわかる．

命題 V.3 a を自然数，b を a の位の数を逆に並び替えてできる数とする．このとき，$a-b$ は 9 の倍数である．

実は，この命題も中学校数学の教科書 [Ke15] や [To15] で問 II.1 に相当する例や例題の後に，数学的活動を与える検討問題として出てくる次の問（に相当する問題）の一般化になっている．

問 V.4 2 桁の自然数と，その数の十の位と一の位の数を入れ替えてできる数との差は，9 の倍数であることを示せ．

なお，問 V.4 において，最初に与えた自然数の十の位と一の位の差を k とすれば，考えている 2 つの数の差は

$$(10x+y)-(10y+x)=9(x-y)=9k$$

となり，$9|k|$ の倍数である．ここで，$|k|$ は k の絶対値である．この中で $k=1,2,3$ についての考察が平成 29 年度全国学力・学習状況調査 [Ko17] の小学校算数 B の $\boxed{3}$ の問題として登場しており，本稿で取り上げた類の問題から発展的に考えることを経験し，自らの手で命題を見出す活動を行うことは，教壇に立つ際の数学的活動の基盤を与える教師教育カリキュラムとして大きな意味をもつであろう．とくに，小学校教員においては高次の数学的思考のプロセスを経験でき，中学校教員や高校教員においてはより学問として整理された数学を捉えなおす機会になると共に，校種の異なる教員の発想から子どもの分かり方や自分の教え方を見直す契機ともなり得る．

また，命題 V.1 の証明では，法 11 による合同式 $10^i \equiv (-1)^i \pmod{11}$ から n 桁の自然数 $a=\sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$ について

$$a \equiv (-1)^{n-1}a_{n-1}+\cdots+a_2-a_1+a_0 \pmod{11}$$

が示されているが，これは先に触れた 11 の倍数判定法である次の命題を与える基本的な関係式である．

命題 V.5 a を自然数とする．a の各位の数に一の位から順に $+,-,+,-,\cdots$ と交互に符号を付けて，それらを加えた値が 11 の倍数であれば，a は 11 の倍数である．

さらに，命題 V.5 の前で述べた n 桁の自然数 a についての法 11 での関係式をそのまま文章で表現すれば，より一般的な次の命題となる．このような書き換えによる一般化は，数学的な表現の解釈の仕方を経験する活動ともなる．

命題 V.6 a を自然数とする．a の各位の数に一の位から順に $+,-,+,-,\cdots$ と交互に符号を付けて，それらを加えた値を b とする，このとき，a を 11 で割った余りと b を 11 で割った余りは等しい．

教員の方々に合同式の勉強を勧めるわけではないが，数学で扱う最も基本的な関係である同値関係や，集合を数と見なして考えるという数の合同の一面，および，数の合同を通して理解できる「和差積が well-defined に定まる」という概念（これは小学校での分数の和の取扱いにも繋がる）などは，数学的な見方・考え方を働かせるために必要な基本的な道具であり，数学的活動を行う中で子供たちの発言をきちんと理解し，授業の中で活用していくために，あれば役に立つ数学の一体系である．そして，こうした数学的背景と数学的経験の裏打ちによって，その人から発せられる言葉に深みと重みが出てくることが期待できる．

VI　予想命題（その３）

ここでは，§ IV の予想 IV.1 の (2) から派生して提示された予想 IV.2 の (2) と (3) （よって予想 IV.2 の (1) を含む）について，一般に n 桁の場合にはどうであるかを述べておく．

まず，3 桁や 4 桁の自然数の場合には，次が成り立つ．

命題 VI.1 自然数 a と，a の位の数を逆に並び替えてできる数 b の和について次が成り立つ．

(1) a が 3 桁のとき，百の位を x, 十の位を y, 一の位を z とおく．$a+b$ が 111 の倍数であるための必要十分条件は $x+z=2y$ となることである．

(2) a が 4 桁のとき，千の位を x，百の位を y, 十の位を z，一の位を w とおく．$a+b$ の和が 1111 の倍数であるための必要十分条件は $x+w=y+z$ となることである．

(命題 VI.1 の証明) (1) $x+z=2y$ ならば $a+b$ が 111 の倍数であることは § IV の予想 IV.2 の (2) の証明で示した．よって，あとは $a+b$ が 111 の倍数ならば $x+z=2y$ となることを示せばよい．

そこで，$a+b$ は 111 の倍数とする．このとき，$a+b=101(x+z)+20y$ であり，この右辺はある整数 k があって $101(x+z)+20y=111k$ と表せる．この両辺から $111(x+z)$ を引くと，

$$-10(x+z)+20y=111(k-x-z)$$

となる．とくに，左辺の $-10(x+z)+20y=10(2y-(x+z))$ は 111 の倍数である．ここで，

10 は 111 と互いの素であるので，

$$2y-(x+z)=111h$$

となる整数 h がある（つまり，左辺は 111 の倍数である）．ところで，x,y,z は一桁の自然数または零であるので，

$$-20<2y-(x+z)<20$$

が成り立つ．このことと，$2y-(x+z)$ が 111 の倍数であることより，

$$2y-(x+z)=111\times 0=0$$

であるしかない．よって，$x+z=2y$ が得られた．
(2) 同様な流れで示すことができる（詳細は読者の数学的活動の一部とする）． □

5 桁以上の場合についても同様に検証していくと，n 桁についての考察が $n-2$ 桁の場合に帰着できることがわかり，同様の命題が成り立つことが示せる．その具体的な証明は命題 VI.1 の (2) の証明に続き読者に委ねることとするが，その結果が書かれている書物をみたことはないので命題として以下にまとめておく．

命題 VI.2 $n>2$ を自然数とし，a を n 桁の自然数，a の位の数を逆に並び替えてできる数を b とする．$a=\sum_{i=0}^{n-1}a_i10^i$（$a_i$ は 0 以上 9 以下の整数）とおけば，次が成り立つ．

(1) n が奇数のとき（a が奇数桁のとき），$a+b$ が $\underbrace{111\cdots111}_{n\text{ 個}}$ の倍数であるための必要十分条件は $a_0+a_{n-1}=a_1+a_{n-2}=\cdots=a_{\frac{n-1}{2}-1}+a_{\frac{n-1}{2}+1}=2a_{\frac{n-1}{2}}$ となることである．

(2) n が偶数のとき（a が偶数桁のとき），$a+b$ が $\underbrace{111\cdots111}_{n\text{ 個}}$ の倍数であるための必要十分条件は $a_0+a_{n-1}=a_1+a_{n-2}=\cdots=a_{\frac{n}{2}-1}+a_{\frac{n}{2}}$ となることである．

なお，上記の命題 VI.2 や命題 IV.3 では $\underbrace{111\cdots111}_{n\text{ 個}}$ の倍数になることを考察したが，$\underbrace{111\cdots111}_{n\text{ 個}}$ の約数にはいろいろな素因数が現れ，特定の倍数の命題にすることは容易ではない．たとえば，11 は素数であるが，

$$\begin{aligned}
&111=3\cdot 37,\\
&1111=11\cdot 101,\\
&11111=41\cdot 271,\\
&111111=3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37,\\
&1111111=239\cdot 4649,\\
&11111111=11\cdot 73\cdot 101\cdot 137,
\end{aligned}$$

となり，その後しばらくは合成数が続く．4 桁以上の偶数桁については，

$$\underbrace{1111\cdots1111}_{n\text{ 個}}=\underbrace{11\cdots11}_{\frac{n}{2}\text{ 個}}\times 1\underbrace{00\cdots00}_{(\frac{n}{2}-1)\text{ 個}}1$$

となり，半分の桁の場合に帰着することができる．さらに，一般に桁数が合成数であれば，素数桁の成分で割ることができるので素数桁の場合に帰着することができる．しかし，

$$\underbrace{111\cdots111}_{19\text{ 個}}=\frac{10^{19}-1}{9}$$

は素数となる．実は，この形の数がいつ素数になるのか，またどのくらい素数になるものがあるのかは未解決問題である．義務教育の教科書に書かれている問題は解ける問題が並んでいるため，まだ解かれていない問題に遭遇することは稀であるが，知られている命題をもとにこのように新しい問題を検討していけば，未解決問題に出会うこともしばしば起こるものである．今回の命題に関して言えば，あえて素因数分解を考察しなかったことで命題が書けたとも言えるわけである．

さて，命題 VI.2 に話を戻すと，この命題の証明に至らなくとも，個々の桁について検証し，何が起こっているかを調べることは数学的経験であり，具体的に問題を考えることで数学的に考える資質・能力を磨くことに繋がる．この命題の証明では，単に等式を変形するだけでなく，取り得る値の可能性を検討することでその値が零となることを突き止めた．文字式の扱いでは単に式を追うだけでなく，文字や式に与え

られた意味を検討しながら考察することは数学的な見方・考え方を養う上で重要な要素の一つである．

VII　まとめ

本稿では，2 桁の自然数と，その数の位の数を逆に並べてできる数との和を考えることから始めて，最初の命題（問 II.1）を含むような一般の命題や，2 桁では意識されなかったが 3 桁以上の扱いで見出された命題の一般化を導いてみた．とくに命題 IV.3 と命題 V.2 は 2 桁の場合には同じ命題となるが，3 桁以上の場合には全く方向性が違う命題となっている．本稿では扱わなかった予想もあるが，一般化するにあたり，もとの命題をどのように解釈するか，また，どのような事象に注目するかによって，全く違った一般化に辿り着いていることがわかるであろう．本稿のカリキュラムはどの校種の教員にとっても取り組める題材で，その後の拡がりは校種ごとの自由な発想で，3 桁や 4 桁の特殊な場合ついてに拘って考えても良いし（生徒向けの教材研究ではあるが [OIKT20] では 4 桁の数の特別な場合を扱っている），桁数をあげて一般化を考えてみても良い．高校教員であれば n 進位取記数法の場合について考えてもよいだろう．実際，小学校教員の方からは，数学の自由性を感じ取ったとの感想を頂いている．

こうした考察体験は「数学的な見方・考え方を働かせ，数学的な活動を通して，数学的に考える資質・能力」を育むための教師としての技能および数学的経験となり，小学校から高等学校までのすべての新学習指導要領で掲げられている算数科･数学科の目標の，とくに (2) で述べられている「総合的・発展的に考察する力」を養うための教師としての数学的経験を与えており，教師教育カリキュラムの一つとして興味深いものと考えている．一つの正しい命題について，それを証明したら終わりではなく，そのことから自身の数学的に考える資質・能力を活かし次の問題を見つけて，さらにそれを考察していくという数学的経験は，新学習指導要領で掲げられている目標を達成するために必要なことである．このことは児童・生徒への数学的活動に基づく授業の提案として島田茂編著 [Sh95] やその流れを継ぐ竹内芳男・沢田利夫編著 [TS84] でも述べられているが，本稿はそれを教師教育カリキュラムとして考察したものと言える．

本稿で提案する教師教育カリキュラムは，それぞれの校種の教員にとって，新学習指導要領での算数科・数学科の目標を達成するための，教師としての数学的な経験を与えるだけでなく，異なる校種の教員とともにこのような教師教育カリキュラムを体験することによって，異なる校種の教員の発想，それは忘れられている自身の経験であったり，幼少時代のもののわかり方であったり，しいては，現在の自分の教え方に足りないものを発見することに繋がる契機にもなり得る．

そもそも数学的な見方・考え方を働かせる原動力となるものは，先人たちがそういった考え方を蓄積してできた大学で学ぶ体系的な数学理論の中に秘められており，本稿の本文で登場した体系の他にも，整数の計算や多項式の計算は環論という枠組みで具象化ができ，その中で素因数分解とその一意性定理（や多項式の因数分解の考え方）はユークリッド整域が一意分解整域であることに集約され，連立方程式の解法は線形代数学の一側面として完全にその手中に収まる．とは言え，大学数学を一から勉強することは時間的にも大変なことであるので，教師教育カリキュラムが提案され，それによって体系的な数学理論の一系列に触れることができれば，児童生徒の思考を深める授業を支える上で大変意義のあることではないだろうか．

数学者の言うところの「数学をする」という活動の一端が，本稿で考案した教師教育カリキュラムによって体験でき，学習指導要領で掲げられている数学的活動を支える一助となれば幸いである．

付記

査読者の方々には本稿の改訂にあたり有益なコメントを頂きました．ここに感謝申し上げます．また，本学数学教育講座准教授市川啓氏からは「問題づくり」の活動によって数学的な考え方の育成と評価を行う研究として文献 [Sh95] と [TS84] を教えて頂きました．ここに感謝申

し上げます.

参考文献

[OIKT20] 小野雄祐，市川啓，今野省吾，富塚優希 共著, ある文字式の問題解決とその発展における文字式の役割について：差が 6174 になる数を探る問題について, プレプリント，令和 2 年 3 月.

[Sh95] 島田茂 編著, 新訂 算数・数学科のオープンエンドアプローチ -授業改善への新しい提案-, 東洋館出版社，平成 7 年 9 月

[TS84] 竹内芳男，沢田利夫 編著, 問題から問題へ -問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善-, 東洋館出版社，昭和 59 年 4 月

[Ke15] 啓林館, 未来へ拡がる数学 2，平成 27 年 2 月 27 日検定済.

[To15] 東京書籍, 新編新しい数学 2，平成 27 年 2 月 27 日検定済.

[Ko17] 国立教育政策研究所, 平成 29 年度全国学力・学習状況調査 小学校算数 B，平成 29 年 4 月 18 日調査.

[Mo17a] 文部科学省, 小学校学習指導要領解説，算数編，平成 29 年 7 月.

[Mo17b] 文部科学省, 中学校学習指導要領解説，数学編，平成 29 年 7 月.

[Mo18] 文部科学省, 高等学校学習指導要領解説，数学編，理数編，平成 30 年 7 月.