「関数の考え」の素地を培う学習指導の一試み

三井　雅視

An Attempt of Teaching for Readiness of “Idea of Function”

MITSUI　Masashi

概要

小学校算数では，事象を科学的に処理する能力や態度の育成，また，算数の内容の意味理解の深化といった観点から，「関数の考え」の育成が重視されてきた。しかし，そのための学習指導が抽象的，形式的な指導に陥ってしまう等の課題から，そのねらいが十分に達成されているとは言い難い。

「関数の考え」は学習指導要領上，上学年「Ｃ変化と関係」領域に位置付けられるが，その育成のためには下学年からの素地指導が重要である。私は以下の視点に留意して学習指導を行っていくことが「関数の考え」の素地を培っていく上で重要ではないかと考えた。それは，

＜視点１＞児童が二つの変数やその依存関係を見いだすまでの過程を大切にすること。

＜視点２＞見いだした変化の様子や特徴を言葉や式，図などによって表現させ，それらを関連付けることで明確に捉えさせていくこと。

である。この視点を基に，第１学年「なんばんめ」（順序数），第３学年「わり算を考えよう」（余りのある除法）の授業実践に取り組んだ。本稿は，その分析を通して得られた成果と課題をまとめたものである。

Key words：関数の考え　素地指導　関数的な見方　表現の関連付け

Ⅰ　研究の目的

小学校算数では，事象を科学的に処理する能力や態度の育成，また，算数の内容の意味理解の深化といった観点から，「関数の考え」を育てることが重視されてきた（日本数学教育学会，2009，p.125）。このように「一つのもの」を「ほかのもの」と関係付けて捉える考え方は，中島（2015）が「人間が，ものを『考える』ということ，ものが『わかる』ということの本質（p.181）」であると述べたように，算数の学習に止まらず，他教科の学習や現実世界における事象の考察及び問題解決に生かされるものであり，その育成は今後ますます重要なものになってくると考える。しかし，それが十分な成果を挙げているとは言い難いという現状がある。

これを改善するには，指導者である教師が「関数の考え」を育成することの意義を捉え，その上で授業を構想していくこと，そして，下学年の内から様々な領域，内容の学習を通して，二つの変数やその依存関係を見いだしていく経験を児童に数多く積ませていくことが重要だと考える。そこで，まずは文献調査等によって「関数の考え」についての理解と考察を深め，そこで得られた知見を，教材開発や学習指導の工夫に生かしていこうと考えた。特にここ数年は下学年の児童を担任していることから，「関数の考え」の素地を培う指導の在り方に問題意識をもって，授業実践に取り組んでいるところである。

本稿では，第１，第３学年で取り組んだ二つの授業実践について述べ，その考察を通して得られた成果と課題についてまとめたい。

Ⅱ　「授業づくりの視点」の設定

１「関数の考え」の指導の重点

「関数の考え」とは,「数量や図形について取り扱う際に,それらの変化や対応の規則性に着目して,事象をよりよく理解したり，問題を解決したりすること（文部科学省，2018，p.62)」である。これは算数科の全ての領域を貫く汎用性を有したものであり，算数教育の大きな柱の一つとして歴史的に重視されてきた。

「関数の考え」の指導の重点は，この考えを利用して「仕事ができる」ようにすること，例えば変わるものの中から変わらない「きまり（法則)」を発見し，それを基に結果を予測したり,「とらえることが難しいＡの現象を,捉えやすいＢの現象でとらえよう」としたりすることで，効率的に問題解決ができるようにしようとする考え方を育てていくことである（杉山，2008，pp.239-244)。また，松原（1977）は,「関数の効用」について,「問題中に含まれていない集合を見つけて新たに関数を設定するときに発揮される（p.175)」と述べている。

２　「関数の考え」の学習指導上の課題

戦後,「関数の考え」の指導が特に重視されたのが,1960 年代の数学教育現代化運動である。「関数の考え」によって代数的内容と幾何的内容の統合を図るなど,「数学的な内容の根底にある中心的な観念」としての役割を期待された（文部省，1973，pp.3-4)。

しかし，杉山（2008）はこの試みは「失敗」であると断じ,その原因は学習指導において関数の定義,すなわち一意対応が強調されすぎたことにより,「価値あることができなかった」ことにあると述べている（p.243)。また，中島（2015）も,「関数の考え」の指導が「あまりに形式的になりすぎていること」，そして「数学的な概念や法則を導くという積極的な立場での考察やその意義についての理解が少ない」と述べ，さらに研究を深めていく必要性を指摘している（p.174)。

このように,「関数の考え」の指導に対しては，関数そのものに関する形式的な知識や技能の指導に止まり，児童の問題解決の力となり得ていないという課題が指摘されている。そして，その要因として，教師の中で比例や反比例など関数そのものの内容的な指導と,「関数の考え」の指導の区別がなされていないこと,そのために,授業で扱われる問題の多くが,依存関係にある二つの変数の存在が自明であり,「すでに関係が見えている二つの量を改めて考え直させている活動になっている（黒澤，1994)」ということが考えられる。

「関数の考え」を育てていくには,授業において,児童が自身の経験に照らして，どのようにすれば未知なる事象を捉えることができるか考え，自ら変数を見極めたり，決めたりするという活動を保障していくことが重要である（中島，2015，pp.214-215)。教師には,二つの変数の存在やその依存関係を,児童が自ら見出していくような学習指導を展開していくことが求められる。

３　下学年における「関数の考え」の素地指導

「関数の考え」の指導は,学習指導要領では上学年の「Ｃ　変化と関係」領域に含まれる。しかし，文部科学省（2018）は,「下学年においても，数や図形の等の考察において,数の関係を考察したり,変化の規則に注目したりする場面が多いことに注意が必要であり,そのような場面は『関数の考え』の素地指導をする重要な機会である（p.41 原文ママ)」と述べ，下学年からその素地（「関数的な見方」(1)）を培っていくことの重要性を指摘している。

これを具現化するには，算数のあらゆる内容の中に潜んでいる指導の可能性を見いだし，教材や授業として表現することができる教師の「数学眼（松原，1972，p.346〕」が欠かせない。松原（1972）は，その難しさと重要性について，

「関数としての着眼は算数の数量関係の分野にとどまるものではなく全分野にまたがってなされなければならない。このことは関数指導の特色であり同時にその重要性を示すものであるが，教師にとっては容易な業ではない（p.343)」

「・・・とくに，教師がこの眼をもっているときは,

自然に子どもたちをこのような着眼に引き入れることになるであろうことは間違いない（p. 346)」と述べている。児童の「関数の考え」の育成を図る学習指導は，教師が自らの「数学眼」を養っていくことと併せて考えられなくてはならない。

また，「関数の考え」の素地指導については，文部省（1973）に詳しい。同書では，指導上の留意点として，「関数の考え」はあくまで数，量，図形等の内容を「的確に理解するための支え」であり，「子供の必要感を考慮しないで，無理をして関数の考えを前面に出す指導」に陥ることがないよう戒めている。また，「結果としての知識や方法を形式的に与えるのではなく，低学年から，児童が問題意識をもつような学習指導が必要である」として，「児童に迫る必要感，目的感のある場の設定」，「関数の考えの重点を示唆する発問」，そして問題解決後に「思考の過程を反省し，基礎となった考えをまとめ，一般化し，次の機会に用いようという意欲，態度を育成していくこと」が重要であると述べている（pp. 29-34)。

４　「授業づくりの視点」の設定

以上を踏まえ，以下の二つの「授業づくりの視点」を設定し，担任する第１，第３学年の児童を対象に，授業実践に取り組んだ。

＜視点１＞

児童が二つの変数やその依存関係を見いだすまでの過程を大切にすること。

＜視点２＞

見いだした変化の様子や特徴を言葉や式，図などによって表現させ，それらを関連付けることで明確に捉えさせていくこと。

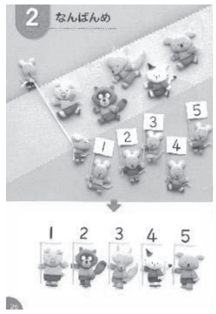
授業を構想する際には，この二つの視点を基に，教材の特質や児童の実態に応じた具体的な手立てを考案していった。問題場面の提示や発問の工夫などによって児童の「関数的な見方」を引き出すこと，そしてそれを友達と共有しながら，より明確に捉えられるようにするために，様々な数学的表現を関連付けていくことを重視した。

Ⅲ　授業実践

１　第１学年「なんばんめ」（順序数）

（１）教材について

順序数の学習の導入である。東京書籍（2015）p. 26（図１）では，５匹の動物が徒競走をする場面が提示されている。徒競走の性格上，「前」から数えることが自然であり，その他の数え方は出てきにくい。「後ろ」から数えさせるには「後ろから数えるとどうなるかな」などと，自明的に問い掛けざるを得なくなるのではないかと考えた。



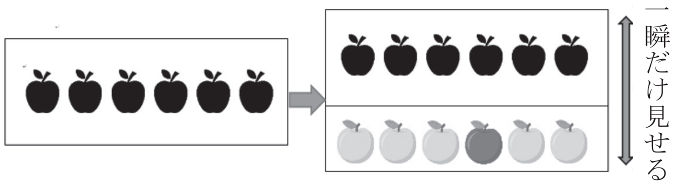
（図１）なんばんめ

学級の児童は，日常的に「何番目」や「何個目」といった順序数を用いた表現を使っているという実態があった。そこで，授業の中で児童が生活経験を通して学んできた「何番目」という順序数を用いた表現を自然と引き出すこと，そして，「左・右」や「前・後」，「上・下」といった基準とする方向によって，同じ位置にある物でも数え方や表し方が異なることに気付かせたいと考えた。そして，それをドット図で表現し，伝え合うことで，一人では気付かなかった見方や考え方を見いだしていく経験をさせたいと考えた。

（２）授業の実際

【手立て１】基準とする方向を決める
～「シルエットゲーム」の提示～

そこで提示したのが，「シルエットゲーム」である。横１列に並んだ６個のリンゴのシルエットの下には，色の付いたリンゴの絵が隠されている。６個の内，１個だけが赤リンゴ，その他は青リンゴである（図２）。



（図２）シルエットゲーム

はじめに「赤いリンゴは，どこにありますか」と問い掛け，一瞬だけシルエットを外し，色の付いたリンゴの絵を見せた。以下，その後の授業記録（紙幅の都合上一部省略，以下同じ）である。

T_1：よく見ててよ。いいですか？せえの，パッ。（シルエットを外す。）
C_1：ああ。
C_2：分かった。
C_3：右から３番目。
T_2：「もう１回見たいな」って言う人，いますか？今度はさっきより短いから，集中して見るんだよ。せえの，パッ。（シルエットを外す。）
C_4：ああ。
C_5：分かった，分かった。
C_6：右から３番目。
T_3：赤いリンゴはどこにありましたか？C_7さん。
C_7：右から３番目です。
T_4：「オッケー」が多いな。
C_8：えっ，４番目だよ。
T_5：おっ？
C_9：左からもだよ。右からじゃなくて。
T_6：はい。C_7さんが言ったのに「オッケー」が多かったので，ノートに書いておきましょう。（「みぎから３ばんめ」と板書する。）
C_{10}：先生，違うよ。
T_7：違うのもあるの？教えて。C_{11}さん，何て言おうとしたの？
C_{11}：左から３番目だよ。
C_{12}：えっ？
C_{13}：違うよ。
C_{14}：左から４番目になる。

問題場面を提示すると，児童はすぐさま自分の思いをつぶやき始めた。答えが一瞬しか見えないことが，かえって児童の意欲と集中を高めたと考える。

様々な反応の中にC_3やC_6のつぶやきもあり，教師が「何番目ですか」と問うことなく，順序数を用いた表現を児童から引き出すことができた。ここで左から数えた子供にも発言させたいと考え，T_4やT_6のように「右から３番目」を強調した。すると，C_9やC_{10}のような反応が見られた。このようにして，右から数えた子と左から数えた子，双方の考え方を引き出すことができた。

【手立て２】図を活用して位置を表したり，数え方を説明したりする活動の設定

基準とする方向によって数え方が異なることは明らかになってきた。しかし，シルエットにより赤リンゴの正しい位置が確認できないため，C_{11}～C_{14}のような混乱が見られ始めた。

そこで，再度，シルエットを外して位置を確かめさせた。そして，それをノートにドット図で表させることで考えの明確化を図った（図３）。さらに，黒板にも同様のドット図を描き，その後の集団検討では，この図を用いて数え方を説明させることで，児童の考えを全体で共有できるようにした（図４）。

このように児童に図を操作させたり，それを用いて説明させたりすることで，右から数えた時と左から数えた時とでは，数え方や表し方は異なるものの，いずれも同じ位置を表していることを視覚的に捉えさせることができたと考える。


（図３）ノートに図で表す

（図４）図を使って説明する

２　第３学年「わり算を考えよう」
（余りのある除法）

（１）教材について

余りのある除法の単元の終末に，活用問題としてしばしば取り上げられる「さいごの１こ」というゲームを扱った授業を行った。ルールは以下のとおりである。

- 「みんな」と「先生」が，左から順に，交互にお団子を取っていく。
- １度に取れるのは，１個から３個まで。
- 最後の１個を取った方の負け。

○○○○○○○○○○○○●

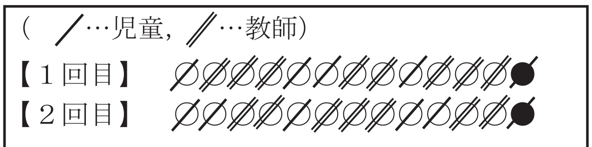
このゲームは，後攻（「先生」）が４個のまとまりを作るように取っていけば，必ず先攻（「みんな」）に 13 個目のお団子を取らせることができる。実際にゲームを行い，何度も教師に負けることで，児童は教師の取り方に「何かきまりがあるのではないか」という問いをもつ。それを契機として，ゲームの結果（ドット図）を基に，両者が取ったお団子の個数の対応関係に着目させていきたいと考えた。

楽しみながら何度もゲームに取り組むことで，児童は次第にゲームの構造に気付いていく。その直観的な気付きを，図を活用することで明確に捉えさせていきたいと考えた。

（２）授業の実際

【手立て１】お団子の取り方からきまりを見いだす
～「さいごの１こ」ゲームの提示～

授業では，はじめに教師が後攻となって２回ゲームを行った。結果は図５のとおりである（実際には，児童が取ったお団子は赤色の斜線，教師が取ったお団子は黄色の斜線で印を付けていった）。



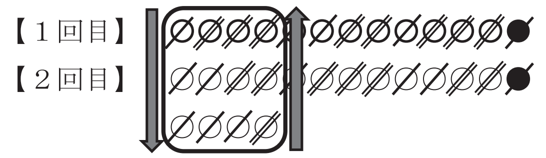
（図５）１回目，２回目のゲームの結果

２回目のゲームの途中から，後攻の教師の方が有利なのではないかと疑う児童が現れた。また，お団子の数が残り５個になった時点で，「もう終わった」や「負けた」というつぶやきが生まれた。そして，ゲーム終了と同時に「先生ずるい」という声が上がった。これらは，ゲームの構造への気付きの端緒となる反応である。そこで，そのように感じた根拠を児童から具体的に引き出したいと考え，授業を展開していった。以下，その後の授業記録である。

T_8：先生に何か言いたいことがある人？
C_{15}：ずるいです。
T_9：C_{16}君，何が言いたいの？
C_{16}：後攻が勝ちます。
C_{17}：最初に先生がやったら…。
C_{18}：うちらの勝ちだ。
T_{10}：つまり，「後から攻める方が勝つ」ってことなの？
C_{19}：えっ，本当？
C_{20}：やってみようよ。
T_{11}：どうして「後から攻める方が勝つ」って言えるのか？ここ，大事なところですね。同じこと考えていた人？（学級の半数，15 名程度が挙手する。）「後だろうが先だろうが，あまり関係ない」って思う人？（５名程度が挙手する。）分かれたね。言いたいことがある人？C_{21}君。
C_{21}：（板書のゲームの結果を指差しながら）ここが１，２，３って変わるたびに，ここも１，２，３って変わる。こっちが４になったら，こっちも４になって。こっち３を出したら，こっち１を出して，全部４になる。だから，結局先生が勝つ。
C_{22}：ああ，分かった，分かった。
C_{23}：だから後攻が有利だって言ったんだよ。

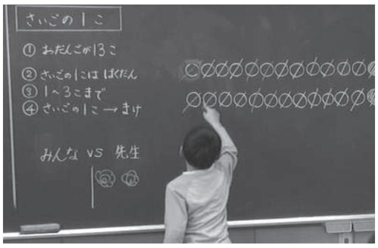
児童はまず C_{15}～C_{20} のように先攻か後攻か，という点に着目した。そこで，T_{11} のようにそう考える根拠を問い掛けた。しかし，これに対する児童の反応はあまりなく，この時点では多くの児童が，教師と児童のお団子の取り方の対応関係には着目していなかったと考える。

次に，挙手をしていたC_{21}を指名した。C_{21}はノートへの記述やつぶやきから，このゲームの構造をある程度捉えていたと考えられる児童である。C_{21}は板書上のゲームの結果の中でも，図６の囲んだ箇所に着目し，矢印のように指差しながら説明した。



（図６）C_{21}の考え

「みんな」のお団子の取り方が「１，２，３」と変わるのに伴って，「先生」のお団子の取り方はそれとは反対になっていること，そして，いずれも和が４になっていることへの気付きである。この時，C_{21}は実際には行われていない，３回目のゲームの結果を想像しながら説明をしていた（図７）。１回目と２回目のゲームの結果は偶然によるものだが，この連続性がC_{21}の気付きを促すことにつながったのだと考える。



（図７）図を使って説明する

次に，C_{21}が気付いたお団子の取り方の対応関係をさらに明確化するために，右の授業記録のように，ゲーム中の「もう終わった」，「負けた」という児童のつぶやきを想起させ，T_{12}のように問い掛けた。着目する箇所を最後の５個に絞ることで，話合いを焦点化させられると考えたからである。

これに対して，C_{24}は，「相手が何か必ずその先のところを出して，相手を負けにすることができる」と説明した。この言葉による表現を視覚化するために，図による表現と関連付けさせたいと考え，T_{13}と問い掛けた。C_{25}は，図８のように五つのドットを描き，それに数字を書き加えながら説明を行った（図９）。

T_{12}：みんなの中に，この辺まで（残り５個）きた時に「ああ，もう負けだ」って言った人がいたの。どうして，ここで「もう負けだ」って思ったの？

C_{24}：あそこ（残り５個）からいくと，先攻だったら２とかを出すと，相手が何か必ずその先のところを出して，相手を負けにすることができる。

T_{13}：今のC_{24}君が言ったことが「よく分からない」っていう人？（数名が挙手する。）じゃあ，今C_{24}君が言ったことをこれ（板書上の図）を使って説明できる人いますか？

C_{25}：だから，例えば…。（○を５個描いて）ここから５個くるから。
例えば１やったとしたら…。そしたら，３出してこれ（最後の１個）を取らせて。２までやったとしたら，今みたいに２やって，それでこれ（最後の１個）を取らせて。それで３出したら１やって，ここを取らせる。（最後の１個に１と書く。）

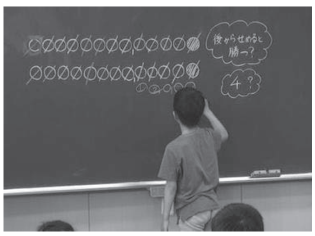
T_{14}：伝わりましたか？

C_{26}：うんうん。

このように，言葉や図による表現を関連付けさせていくことで，児童がゲームの構造を捉え，それを共有できるよう，授業を展開していった。最後のC_{26}のうなずきから，友達の発言への理解が少しずつ深まっていったようだったが，この時点でも不安な表情をした児童が多いというのが現状だった。そこで，その後はこれまでの話合いを基に，友達と繰り返しゲームを行いながら「先生が使ったひみつ」を探るという展開にしていった。

①○○○○
↓
①②○○○
↓
①②③○①

（図８）C_{25}の考え



（図９）図を描いて説明する

【手立て２】ゲームの結果を式で表す活動の設定

友達と何度もゲームを行うことにより，ゲームの構造を理解する児童が増えてきた。そこで，再度全体で３回目のゲームを行った。今回，代表児童のＡさんは「後攻」を強く主張した。結果は図 10 のとおり，Ａさんが勝利した。この３回目のゲームの結果を式で表す活動を設定することで，既習の余りのある除法と関連付けさせていこうと考えた。

（ ／…児童，／／…教師）

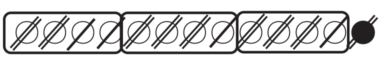
【３回目】 

（図 10） ３回目のゲームの結果

右の授業記録のように，T_{15} の問い掛けに対して，まず C_{27} から加法の式を用いた表現が出された。このように，図を式で表す見方を全体で共有させるために，さらに T_{16} のように問い掛け，板書上の図の４個のまとまりを囲ませていった。

こうした図は，余りのある除法の学習でも頻繁に用いていたものである。児童からの気付きを待ちながら，T_{17} や T_{19} のように揺さぶり，４個のまとまりを作る作業を続けていった。

結局，児童からの気付きが生まれたのは，三つ目のまとまりを囲ませた後だった（T_{21}）。図 11 のように４個ずつのまとまりが囲まれることで，ゲームの構造がより明確になると，児童から様々なつぶやきが生まれた。「４×３＝12」，「四三・十二，余り１」のように乗法の場面として捉えた児童，そして「ああ，これ，わり算だ。13÷４の。３余り１になる」のように除法の場面として捉えた児童がいた。こうしたつぶやきを取り上げながら，全てのゲームの結果が「４×３＝12」，そして「13÷４＝３あまり１」という式で表せることを捉えさせていった（図 12）。

【３回目】 

（図 11） ４個のまとまりを作る

T_{15}：今の勝負（３回目）で「ひみつが見えてきた」っていう人？

（多数の児童が挙手する。「４方法だ」としきりにつぶやく児童がいる。隣の児童と話し合わせる。）

C_{27}：例えば，あれ（３回目）で言うと，先生が最初に２個取って，それでＡさんが２個取って，２＋２で４になって…。

T_{16}：ストップ。ここまで分かった？ C_{27} さんが言った，２＋２＝４に印を付けてくれる人？

C_{28}：先生のこの２と，Ａさんのこの２を足して，４。

T_{17}：確かに４だ。でも４になっているのは，ここだけでしょ？

C_{29}：いや。

C_{30}：ここにも４。

T_{18}：つまり，これは何と何で４なの？

C_{31}：３＋１。

T_{19}：ここにも，確かに４が見える。でも，偶然が２回重なっただけでしょ？

C_{32}：ちがう。

T_{20}：３回目もある。

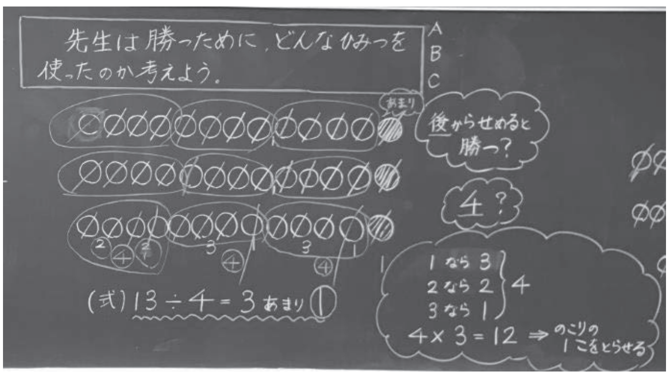
C_{33}：３と１。

T_{21}：そこも間違いなく４。ああ，なるほど。こうなると，13 個のお団子が。４，４，４。

C_{30}：４×３＝12。

C_{31}：四三・十二，余り１。

C_{32}：ああ，これ，わり算だ。13÷４の。３余り１になる。



（図 12） 本時の授業の板書

Ⅳ　授業分析を通して得られた成果と課題

１　成果

（１）児童の「関数的な見方」の顕在化

本授業実践で児童に提示したのは，いずれもゲーム的要素の強い問題場面だった。ゲームであるが故に「正解／不正解」，「勝ち／負け」が明確である。このことが下学年の児童の意欲を喚起し，素直な反応や表現を引き出すことにつながった。

その中で，「関数的な見方」と捉えられる表現も，児童から自然と引き出すことができた。例えば，第１学年の授業実践におけるC_9「左からもだよ。右からじゃなくて」や，第３学年の授業実践におけるC_{21}「ここが１，２，３って変わるたびに，ここも１，２，３って変わる」，C_{25}「例えば１やったとしたら…。そしたら，３出してこれ（最後の１個）を取らせて」といった発言は，児童が自ら二つの変数の存在を見出し，一方の変数を仮定して対応関係を説明しようとしたものだと考える。

こうした見方や考え方を，教師が二つの変数を明示したり，その関係を自明的に問うたりすることなく，問題場面の提示の工夫によって引き出すことができたことは成果であった。下学年の内からこのような学習経験を蓄積していくことが，「関数の考え」の素地を培うのに有効ではないかと考える。

（２）ドット図活用の有効性

児童の「関数的な見方」を視覚化することで明確に捉えさせたり，全体で共有したりするのに，ドット図が有効であることも明らかになった。第３学年の授業実践では，この図に誘われるように新たな気付きを得たり（C_{21}やC_{30}〜C_{32}），自分の考えを説明する道具としてアレンジして使ったり（C_{25}）する姿も見られた。

このような簡易な表現方法は，第１学年の児童でも無理なく用いることができる。児童が自分で描きながら考えを明確にしたり，それを活用しながら説明したりする場を設定することは，児童の概念形成や表現力の向上を促すとともに，「答えを自分（たち）で確かめよう」とする主体的な態度の育成にもつながると考える。今後も，このように図を活用する力を一層高められるよう工夫していきたい。

２　課題

下学年でのこのような学習経験が，児童の問題解決の力の高まりにどのようにつながるのか，検討していくことが必要である。そのためにも，さらに多くの学年の児童を対象に授業実践を行い，分析を積み重ねていく必要がある。今後は特に，「関数の考え」の問題解決への活用に焦点を当てて，研究を進めていきたい。

註

（１）日本数学教育学会（2009）によると，「関数の考え」の素地のことを「関数的な見方」と表現する，としている（p. 125）。

引用･参考文献

黒澤俊二（1994）「『関数の考え』の評価と指導はこれでいいのか（１）―『関数の考え』の意義と評価指導上の問題点―」『日本数学教育学会誌 臨時増刊　総会特集号 76』p. 78
杉山吉茂（2008）『初等科数学科教育学序説　杉山吉茂講義筆記』東洋館出版社
東京書籍（2015）『新編 あたらしいさんすう１上』（教科書／教師用指導書指導編）東京書籍
中島健三（2015）『復刻版　算数・数学教育と数学的な考え方　その進展のための考察』東洋館出版社
日本数学教育学会（2009）『算数教育指導用語辞典 第四版』教育出版
松原元一 編著（1972）『新しい算数の研究(下)』近代新書出版社
松原元一（1977）『数学的見方考え方　子どもはどのように考えるか』国土社
文部科学省（2018）『小学校学習指導要領（平成 29 年告示）算数編』日本文教出版
文部省（1973）『小学校算数指導資料　関数の考えの指導』東京書籍